

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
EKONOMICKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2008

Lukáš Dudek



VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANČÍ

Stanovení hodnoty Value at Risk portfolia finančních aktiv

Value at Risk determination of financial assets portfolio

Student: Lukáš Dudek

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Ostrava 2008

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

ve smyslu § 17, odst. f, zákona č. 111/98 Sb. a Studijního a zkušebního řádu pro studium v  
magisterských studijních programech Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava,  
čl. 23 až 26

Jméno diplomanta: **Lukáš Dudek**

Studijní obor: **Finance**

Název tématu:

**Stanovení hodnoty Value at Risk portfolia finančních aktiv**

Anglický název tématu:

**Value at Risk determination of financial assets portfolio**

*Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í ( o s n o v a ):*

Úvod

1. Měření a řízení finančních rizik
2. Popis použití metodologie Value at Risk portfolia aktiv
3. Stanovení hodnoty Value at Risk portfolia aktiv

Závěr

Seznam použité literatury

Seznam zkratk

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Přílohy

Rozsah průvodní zprávy: 50 – 60 stran

Rozsah příloh: podle potřeby

Seznam odborné literatury:

DOWD, Kevin. *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. Chichester: John Wiley and Sons, 1998. xi, 274 s. ISBN 0-471-97622-9.

JORION, Philippe. *Value at Risk: The New Benchmark For Managing Financial Risk*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1997. xxxi, 544 s. ISBN 0-07-135502-2.

ZMEŠKAL, Zdeněk. *Finanční modely*. 2. vyd. Praha: Ekopress, 2004. 236 s. ISBN 80-86119-87-4.

Vedoucí diplomové práce: Prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Datum zadání diplomové práce: 20. listopadu 2007

Datum odevzdání diplomové práce: 25. dubna 2008

.....  
diplomant

.....  
vedoucí DP

L. S.

.....  
vedoucí katedry

.....  
děkan

V Ostravě dne 20. 11. 2007

Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně všech příloh  
vypracoval samostatně.

Na tomto místě chci poděkovat prof. Dr. Ing. Zdeňku Zmeškalovi za velmi cenné rady, připomínky a náměty, které byly velkým přínosem při zpracování této diplomové práce.

# Obsah

<b>Úvod.....</b>	<b>3</b>
<b>1. Měření a řízení finančních rizik.....</b>	<b>4</b>
1.1. Rozdělení finančních rizik .....	4
1.1.1. Úvěrové riziko .....	5
1.1.2. Tržní riziko .....	6
1.1.3. Likvidní riziko .....	7
1.1.4. Operační riziko .....	7
1.1.5. Obchodní riziko .....	7
1.1.6. Systémové riziko .....	8
1.1.7. Rozdělení rizik podle „greeks“ .....	8
1.1.8. Jedinečné a systematické riziko .....	8
1.2. Výpočet výnosů.....	9
1.3. Kvantifikace rizika .....	9
1.4. Riziko a výnos .....	11
1.5. Způsoby eliminace a řízení rizik .....	12
1.5.1. Diverzifikace portfolia .....	12
1.5.2. Finanční deriváty .....	13
1.5.3. Hedging .....	15
1.5.4. Regulace finančních rizik.....	16
<b>2. Popis použití metodologie Value at Risk portfolia finančních aktiv .....</b>	<b>20</b>
2.1. Value at Risk .....	20
2.1.1. Definice VaR.....	20
2.1.2. Obecné odvození VaR.....	22
2.1.3. Metody modelů Value at Risk.....	24
2.2. Modelování tržní ceny akcie .....	26
2.3. Volatilita.....	31
2.4. Simulace Monte Carlo.....	33
2.4.1. Simulace jedné náhodné proměnné.....	34
2.4.2. Generování závislých proměnných .....	36
2.4.3. Výpočet VaR.....	37
2.5. Expected Shortfall .....	37
2.6. Nenormální rozdělení pravděpodobnosti výnosů.....	38



2.6.1.	Test dobré shody .....	40
2.6.2.	Směsice dvou normálních rozdělení .....	41
2.6.3.	GED rozdělení.....	43
2.6.4.	Studentovo rozdělení.....	44
2.6.5.	Teorie extrémních hodnot .....	45
<b>3.</b>	<b>Stanovení hodnoty Value at Risk portfolia finančních aktiv .....</b>	<b>50</b>
3.1.	Sestavení portfolia a zjištění vstupních dat .....	50
3.1.1.	Výpočet výnosů.....	52
3.1.2.	Test normality výnosů.....	52
3.2.	Výpočet Value at Risk pomocí simulace Monte Carlo .....	56
3.2.1.	Výpočet volatility .....	56
3.2.2.	Generování cen aktiv.....	58
3.2.3.	Generování závislých proměnných .....	58
3.2.4.	Stanovení VaR.....	60
3.2.5.	Stanovení expected shortfall .....	63
3.2.6.	Výpočet pravděpodobnosti vybraných ztrát.....	64
3.3.	Výpočet VaR pomocí Teorie extrémních hodnot .....	64
3.3.1.	Analýza konců rozdělení .....	64
3.3.2.	Odhad parametrů modelu .....	65
3.3.3.	Výpočet pravděpodobností vybraných ztrát.....	65
3.3.4.	Výpočet VaR .....	66
3.4.	Porovnání výsledků .....	67
	<b>Závěr.....</b>	<b>70</b>
	<b>Použitá literatura.....</b>	<b>71</b>

# Úvod

V dnešním světě ovlivněném globalizací a rozvojem informačních a komunikačních technologií platí, že události na jedné straně světa mají vliv na to, co se děje jinde ve světě. A to platí i pro finanční trhy. Důkazem může být americká hypoteční krize, kdy neschopnost klientů splácet své závazky v kombinaci s poklesem tržních cen jejich nemovitostí způsobila velké problémy mnoha bankám. A nejenom bankám, krize zasáhla s různou intenzitou i do ostatních segmentů ekonomiky a do ostatních částí světa. Zasáhla také akciové trhy, kde způsobila pokles cen akcií a zvýšení volatility. A právě v tomto období se více než kdy jindy projeví důležitost řízení rizik.

O významu řízení finančních rizik svědčí skutečnost, že hlavní postupy řízení, měření a regulace úvěrového a tržního rizika jsou zakotveny v právních dokumentech (například v direktivách Evropské unie a v zákonodárství vyspělých zemí) a v dokumentech Basilejského výboru pro bankovní dohled.

V oblasti řízení rizik se stal velice používaným ukazatel Value at Risk. Častým předpokladem při výpočtu Value at Risk většinou je, že rozdělení pravděpodobnosti výnosů finančních aktiv je normální. Tento předpoklad však ve skutečnosti neplatí, protože rozdělení výnosů má většinou těžší konce než normální rozdělení, což má za následek podcenění rizik. Proto byly vyvinuty metody zohledňující tento jev.

Cílem práce je aplikovat, ověřit a porovnat stanovení hodnoty Value at Risk portfolia akciových instrumentů pomocí simulace Monte Carlo předpokládající normální rozdělení výnosů a pomocí teorie extrémních hodnot, která dokáže vystihnout těžké konce rozdělení.

První kapitola je zaměřena na obecný teoretický úvod k finančním rizikům, rozdělení finančních rizik, kvantifikaci tržních rizik a na základní metody jejich řízení a eliminace.

Ve druhé kapitole je podrobněji popsána metodologie Value at Risk a způsoby jejího výpočtu, modelování tržních cen aktiv a je vysvětlen princip simulace Monte Carlo. V závěru kapitoly je věnována pozornost možnostem výpočtu Value at Risk v případě nenormálního rozdělení výnosů.

V úvodu třetí kapitoly je nejprve proveden test normality rozdělení výnosů aktiv. V dalších částech je vypočítána Value at Risk nejprve pomocí simulace Monte Carlo za předpokladu normálního rozdělení výnosů, poté pomocí teorie extrémních hodnot, která takový předpoklad nemá. Na závěr kapitoly jsou výsledky obou metod porovnány.

# 1. Měření a řízení finančních rizik

Ve finančním rozhodování jsou situace, kdy se rozhodujeme na základě určitých známých informací. Pokud známe všechny potřebné informace, rozhodujeme za určitosti a takové situace jsou popsány pomocí deterministických modelů. Za rizika se rozhodujeme tehdy, pokud popisované jevy dokážeme popsat pomocí rozdělení pravděpodobnosti. Takové modely jsou pak deterministické. Neumíme-li realitu popsat pomocí rozdělení pravděpodobnosti, ale jen pomocí určitých intervalů, hovoříme o tzv. fuzzy množinách. Předchozí situace se mohou také navzájem kombinovat, pak hovoříme o hybridních modelech.

Na finančních trzích existují finanční rizika. Finanční riziko je obecně definováno jako potenciální ztráta subjektu, tedy nikoli již existující realizovaná či nerealizovaná finanční ztráta, ale ztráta v budoucnosti vyplývající z daného finančního či komoditního nástroje nebo finančního či komoditního portfolia.

## 1.1. Rozdělení finančních rizik

Finanční rizika se člení na pět hlavních podskupin, na riziko úvěrové, tržní, likvidní, operační a obchodní. Kromě toho existuje ještě systémové riziko v případě, že jakékoli z pěti předchozích rizik (samostatně či v kombinaci) způsobí subjektu potíže, které mají negativní dopad na mnoho dalších subjektů či v krajním případě i na větší část finančního systému.

V Tab. 1.1 je znázorněno rozdělení finančních rizik.

*Tab. 1.1: Rozdělení finančních rizik*

<b>Úvěrové riziko</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>➤ přímé úvěrové riziko</li><li>➤ riziko úvěrových ekvivalentů</li><li>➤ vypořádací riziko</li><li>➤ riziko úvěrové angažovanosti</li></ul>
<b>Tržní (cenové) riziko</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>➤ úrokové riziko</li><li>➤ akciové riziko</li><li>➤ komoditní riziko</li><li>➤ měnové riziko</li><li>➤ korelační riziko</li><li>➤ riziko úvěrového rozpětí</li></ul>

<b>Likvidní riziko</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ riziko financování</li> <li>➤ riziko tržní likvidity</li> </ul>
<b>Operační riziko</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ transakční riziko</li> <li>➤ riziko operačního řízení</li> <li>➤ riziko systémů</li> </ul>
<b>Obchodní riziko</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ právní riziko</li> <li>➤ riziko změny úvěrového hodnocení</li> <li>➤ reputační riziko</li> <li>➤ daňové riziko</li> <li>➤ riziko měnové konvertibility</li> <li>➤ riziko pohromy</li> <li>➤ regulační riziko</li> </ul>

### 1.1.1. Úvěrové riziko

**Úvěrové (kreditní) riziko** je rizikem ztráty ze selhání partnera (dlužníka) tím, že nedostojí svým splatným závazkům podle podmínek kontraktu, a způsobí tím držiteli pohledávky (věřiteli) ztrátu. Tyto závazky vznikají z úvěrových aktivit, obchodních a investičních aktivit, z platebního styku a z vypořádání cenných papírů při obchodování na vlastní i cizí účet.

Za účelem snížení úvěrového rizika se (finanční) instituce snaží obchodovat s důvěryhodnými stranami, v případě potřeby získat kolaterál a používat rámcové dohody, které obsahují klauzule o započtení (netting) a o kolaterálech. Obecně přijímanými kolaterály jsou hotovost a cenné papíry.

**Přímé úvěrové** riziko je rizikem ztráty ze selhání partnera u tradičních rozvahových položek v plné nebo částečné výši, například u úvěrů, půjček, dluhopisů, směnek apod. Je nejstarším finančním rizikem a zůstává stále nejdůležitějším rizikem finančního trhu.

Riziko **úvěrových ekvivalentů** je rizikem ztráty ze selhání partnera u podrozvahových položek, jako jsou poskytnuté úvěrové přísliby, poskytnuté záruky, poskytnuté akreditivy, deriváty atd.

**Vypořádací** riziko je rizikem ztráty ze selhání transakcí v procesu vypořádání, zejména v situacích, kdy hodnota byla partnerovi dodána, ale hodnota od partnera ještě není k dispozici.

Riziko **úvěrové angažovanosti** je rizikem ztráty z angažovanosti vůči určitému partnerovi, zemi, ekonomickému sektoru, nástroji apod.

Spolehlivost dlužníka je možné hodnotit podle jeho **ratingu**. Ten provádějí ratingové agentury, z nichž nejznámější jsou Standard & Poor's, Moody's a FitchIBCA. Hodnoceny jsou země, společnosti a určité dluhové emise. Rozlišují se v podstatě dva základní stupně – investiční stupeň a spekulativní stupeň. Například podle Standard & Poor's je nejlepší rating označen AAA.

Rating publikovaný ratingovými agenturami je však dostupný pouze pro státy a relativně velké korporátní klienty, proto banky využívají také své vlastní modely pro hodnocení bonity malé a střední firemní klientely a fyzických osob.

### 1.1.2. Tržní riziko

Po úvěrovém riziku je druhým nejvýznamnějším. Jedná se o riziko ztráty způsobené změnami tržních cen finančních či komoditních nástrojů v důsledku nepříznivých změn tržních podmínek. Někdy se zjednodušeně uvádí, že úvěrové riziko je rizikem vrácení peněz a tržní riziko je rizikem výnosu z peněz. Existují základní čtyři kategorie tržního rizika.

- **Úrokové** riziko je rizikem ztráty ze změn nástrojů citlivých na úrokové sazby.
- **Akciové** riziko je rizikem ztráty ze změn cen nástrojů citlivých na ceny akcií.
- **Komoditní** riziko je rizikem ztráty ze změn cen nástrojů citlivých na ceny komodit.
- **Měnové** riziko je rizikem ztráty ze změn cen nástrojů citlivých na měnové kurzy.

Někdy se při členění tržních rizik setkáváme se dvěma vedlejšími kategoriemi. Jsou jimi **korelační** riziko, které je rizikem ztráty z porušení historické korelace mezi rizikovými kategoriemi, nástroji, produkty, měnami a trhy, a riziko **úvěrového rozpětí**, což je riziko ztráty ze změn rozpětí u cenných papírů různého úvěrového hodnocení (například podnikových a státních dluhopisů)

U každé kategorie tržního rizika existují dva parametry, a to kvalitativní a kvantitativní parametr.

**Kvalitativním** parametrem (riziková skupina či rizikový faktor) u úrokového rizika je měna a splatnost či durace nástroje (dluhopisu, směnky apod.), u akciového rizika se jedná o národní trhy a emitenty, u měnového rizika o měnu a u komoditního rizika o komoditu.

**Kvalitativní** parametr udává hodnotu daného nástroje (či nástrojů) v aktivech a pasivech. Velikost úrokového, akciového, měnového a komoditního rizika je přímo úměrná rozdílu hodnot nástrojů se stejným kvalitativním parametrem v aktivech a pasivech (tzv.

otevřená pozice). Při stejné hodnotě daných nástrojů o daném kvalitativním parametru v aktivech i v pasivech není subjekt vystaven riziku (uzavřená pozice).

### 1.1.3. Likvidní riziko

**Likvidní riziko** dělíme na riziko **financování**, které je rizikem ztráty v případě momentální platební neschopnosti a riziko **tržní likvidity**, které je rizikem ztráty v případě malé likvidity trhu s finančními nástroji, bránící rychlé likvidaci pozic, čímž je omezen přístup k peněžním prostředkům. Účelem řízení likvidního rizika je zajistit, aby i za nejméně příznivých podmínek měla instituce přístup k hotovosti za přijatelnou cenu.

### 1.1.4. Operační riziko

**Operační riziko** je ze své podstaty obtížně kvantifikovatelné a člení se na tři podkategorie.

**Transakční** riziko je rizikem ztráty z provádění operací v důsledku chyb v provedení operací, chyb vyplývajících ze složitosti produktů a neschopnosti současných systémů je provádět, chyb v zaúčtování obchodů, chyb ve vypořádání obchodů.

Riziko **operačního řízení** je rizikem ztráty z chyb v řízení aktivit ve front, middle a back office. Jedná se o neidentifikovatelné obchody nad limit, neautorizované obchodování jednotlivými obchodníky, podvodné operace vztahující se k obchodování a zpracování včetně chybného zaúčtování a padělání, praní peněz apod.

Riziko **systémů** je rizikem ztráty v důsledku chyb v systémech podpory. Jedná se o chyby v počítačových programech, o chyby v matematických vztazích modelů, o nesprávné a opožděné podávání informací vedení, o chyby při přenosech dat.

### 1.1.5. Obchodní riziko

**Obchodní riziko** se člení na sedm podkategorií.

**Právní** riziko je rizikem ztráty z právních požadavků partnera nebo z právní neprosaditelnosti kontraktu. Riziko **změny úvěrového hodnocení** je rizikem ztráty ze ztížení dostupnosti peněžních prostředků za přijatelné náklady. **Reputační** riziko je rizikem ztráty z poklesu reputace na trzích. **Daňové** riziko je rizikem ztráty ze změny daňových zákonů nebo z nepředvídaného zdanění. Riziko **měnové konvertibility** je rizikem ztráty z nemožnosti konvertovat měnu na jinou měnu jako následek změny politické nebo ekonomické situace. Riziko **pohromy** je rizikem ztráty z přírodních katastrof, války, krachu finančního systému

apod. **Regulační** riziko je rizikem ztráty z nemožnosti splnit regulační opatření (například kapitálovou přiměřenost) a z chyb v předvídání budoucích regulačních opatření.

#### 1.1.6. Systémové riziko

**Systémové** riziko je rizikem přenosu potíží, kdy neschopnost jedné instituce splnit své závazky při jejich splatnosti způsobí, že i jiné instituce nebudou schopny splnit své závazky při jejich splatnosti. Toto selhání může způsobit značné likvidní a úvěrové problémy a může ohrozit stabilitu finančních trhů. Systémové riziko bankovního sektoru roste v případě vysokých mezibankovních úvěrů a vkladů a společného vlastnictví bank.

Selhání instituce může být způsobeno jakýmkoliv druhem rizika, což může ohrozit další společnosti stejného nebo jiného tržního segmentu. V extrémních případech může dojít i k selhání finančního systému jako celku.

#### 1.1.7. Rozdělení rizik podle „greeks“

Výše uvedené kategorie tržního rizika je možné zobecnit podle následujících hledisek.

**Delta riziko** (riziko absolutní ceny) je rizikem **lineární** změny hodnoty portfolia  $f$  při změně hodnoty podkladového nástroje  $S$  ( $\partial f / \partial S$ ). Do tohoto rizika patří akciové, komoditní a měnové riziko.

**Gama riziko** (riziko konvexity) je rizikem odchylky změny hodnoty portfolia od lineární změny hodnoty portfolia při změně podkladového nástroje  $S$  ( $\partial^2 f / \partial S^2$ ). Toto riziko existuje u nelineárních portfolií, například u opčních.

**Vega riziko** je rizikem změny hodnoty portfolia při změně očekávané volatility  $\sigma$  podkladového nástroje ( $\partial f / \partial \sigma$ ).

**Theta riziko** je rizikem změny hodnoty portfolia při plynutí času  $t$  ( $\partial f / \partial t$ ).

**Rho riziko** je rizikem změny v hodnotě portfolia při změně úrokové míry  $r$  používané pro diskontování budoucích peněžních toků ( $\partial f / \partial r$ ). Jedná se o úrokové riziko.

#### 1.1.8. Jedinečné a systematické riziko

Celkové riziko cenného papíru lze rozdělit na dvě části, na jedinečné (specifické, nesystematické) riziko a na riziko tržní (systematické). **Jedinečné** riziko je charakteristické pro daný instrument, vztahuje se k emitentovi a investoři jej mohou eliminovat vhodnou diverzifikací portfolia. **Tržní** riziko je určeno makroekonomickými podmínkami a souvisí s ekonomikou jako celkem (např. se změnou úrokových měr v rámci měnové politiky

centrální banky). Pokud se zlepší (zhorší) vyhlídky ekonomiky, většina cen cenných papírů stoupne (klesne). Bez ohledu na velikost diverzifikace bude výnosnost portfolia vždy citlivá na takové tržní vlivy. Tržní riziko se dá odstranit hedgingem, kdy k daným aktivům v portfoliu přikoupíme jiná riziková aktiva a vytvoříme hedgingové portfolio tak, aby jeho riziko bylo nižší než riziko původního portfolia.

## 1.2. Výpočet výnosů

Riziko je často měřeno na základě výnosů, které jsou vypočítány z cen a podle frekvence výpočtu výnosy je dělíme na diskrétní, které jsou počítány v diskrétních časových úsecích (např. denní, roční apod.), a na spojitě výnosy, které jsou počítány v nekonečně malých časových intervalech. Jednodenní diskrétní výnos je určen takto,

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P}{P_{t-1}}, \quad (1.1)$$

kde  $P$  je označením ceny aktiva. Jednodenní spojitě výnosy jsou určeny jako

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}. \quad (1.2)$$

Výnos portfolia vypočítáme jako vážený průměr výnosů jeho jednotlivých aktiv, kde váhami jsou podíly aktiv v portfoliu, tedy

$$E(r_p) = \sum_i x_i \cdot E(r_i), \quad (1.3)$$

kde  $x_i$  je podíl  $i$  – tého aktiva v portfoliu a  $E(r_i)$  je střední hodnota výnosů  $i$  – tého aktiva.

## 1.3. Kvantifikace rizika

Základním indikátorem rizikovosti cenných papírů je **koeficient beta**. Ten je definován jako

$$\beta = \frac{E(r_i) - r_f}{E(r_M) - r_f}, \quad (1.4)$$

kde  $r_f$  je bezriziková sazba,  $E(r_i)$  je střední hodnota výnosů  $i$  – tého aktiva a  $E(r_M)$  je střední hodnota výnosů tržního portfolia. Beta tedy udává, o kolik se zvýší dodatečný výnos daného aktiva nebo portfolia, pokud se dodatečný výnos tržního portfolia zvýší o jednotku. Je koeficientem citlivosti výnosů daného aktiva (portfolia) na výnos celku. Rizikovost cenného papíru podle jeho koeficientu beta ukazuje Tab. 1.2.



Tab. 1.2: Rizikovost cenných papírů podle koeficientu beta

$\beta > 1$	agresivní cenný papír, reaguje na podněty více než trh a stejným směrem
$\beta = 1$	chová se stejně jako trh
$0 < \beta < 1$	pasivní cenný papír, reaguje stejným směrem jako trh, ale méně
$\beta = 0$	tržní portfolio a daný cenný papír jsou statisticky nezávislé
$-1 < \beta < 0$	pasivní inverzní cenný papír, reaguje méně a opačně než tržní portfolio
$\beta = -1$	inverzní cenný papír, chová se perfektně opačně než tržní portfolio
$\beta < -1$	agresivní inverzní cenný papír, reaguje více a opačným směrem než trh

Beta portfolia vypočítáme jako průměr koeficientů beta jednotlivých aktiv vážený podíly těchto aktiv, tedy

$$\beta_p = \sum_i x_i \cdot \beta_i . \quad (1.6)$$

Riziko je také měřeno standardními statistickými mírami variability, kterými jsou **rozptyl** a **směrodatná odchylka**. Rozptyl vypočteme takto,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [r_i - E(r_i)]^2 , \quad (1.7)$$

směrodatná odchylka je určena jako odmocnina z rozptylu. **Rozptyl portfolia** vypočítáme

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j x_i \cdot \sigma_{ij} \cdot x_j , \quad (1.8)$$

kde  $\sigma_{ij}$  je kovariance mezi  $i$  – tím a  $j$  – tím aktivem. Je zřejmé, že rozptyl portfolia nezávisí jen na rozptylech jednotlivých aktiv v portfoliu, ale i na vzájemné kovarianci mezi výnosy těchto aktiv.

Dalším velice používaným ukazatel rizika je hodnota **Value at Risk**, která představuje velikost ztráty na určité hladině pravděpodobnosti za určitý časový interval. Světově rozšířeným standardem pro výpočet této hodnoty je metodologie RiskMetrics, kterou vyvinula americká investiční banka J.P. Morgan. Tato banka vyvinula také metodologii nazvanou CreditMetrics používanou pro výpočet kreditního rizika a metodologii

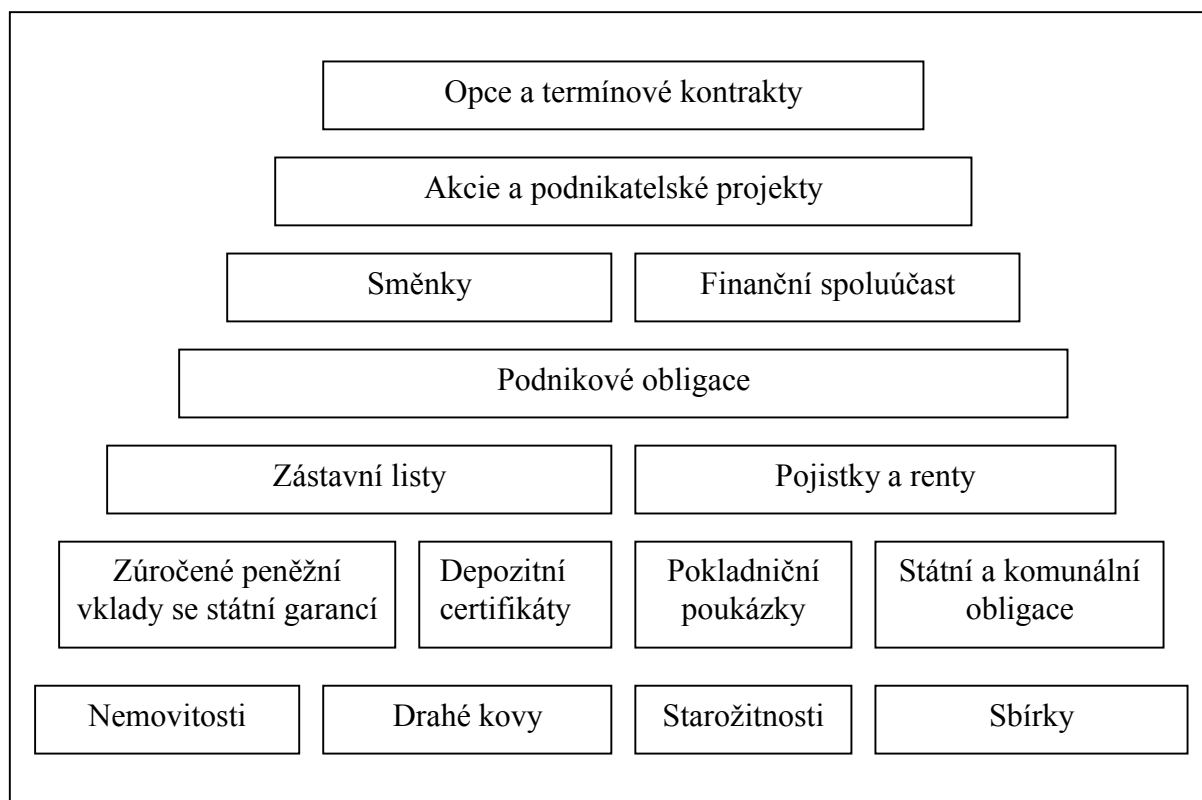
CorporateMetrics pro měření tržního rizika v podnikovém prostředí. Ukazatel Value at Risk bude podrobněji popsán v kapitole 2.1.

#### 1.4. Riziko a výnos

Při investování platí známý vztah mezi výnosem a rizikem. Čím větší přijímáme riziko, tím větší výnos můžeme realizovat, nebo také čím větší výnos očekáváme, tím většímu riziku jsme vystaveni. Tento vztah platí mezi rizikem a očekávaným výnosem, ne mezi rizikem a aktuálním výnosem. Termín „očekávaný výnos“ někdy bývá zaměňován. V každodenní řeči je za „očekávaný“ výsledek považován za ten, který nastane. Statisticky je očekávaná hodnota proměnné definována jako její střední hodnota. Očekávaný výnos je proto vážený průměr možných výnosů, kde váhy použité pro výpočet střední hodnoty jsou jednotlivé pravděpodobnosti, že výnos nastane.

Jednotlivá aktiva tvořící portfolio jsou různě výnosná a tedy i různě riziková. Hierarchie rizikovosti finančních a reálných aktiv je zobrazena bezpečnostní pyramidou na Obr. 1.1, kde její základy tvoří nejbezpečnější aktiva, naopak na vrcholu jsou aktiva nejrizikovější.

*Obr. 1.1: Bezpečnostní pyramida*



*Zdroj: Polách (2002)*

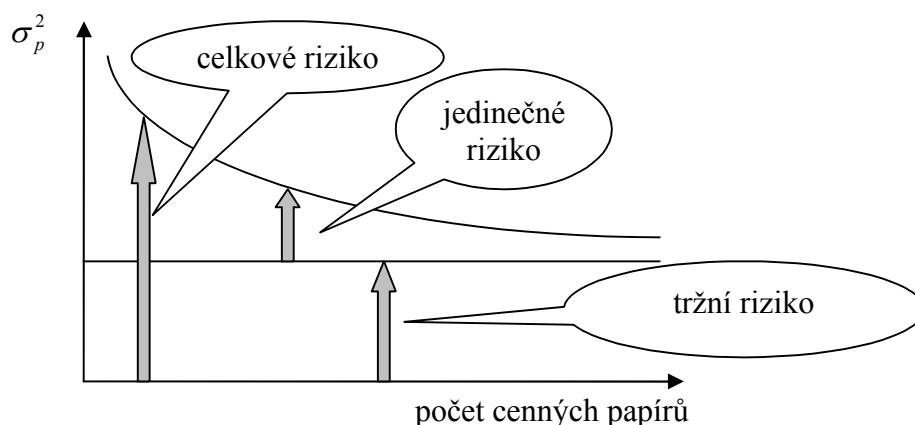
## 1.5. Způsoby eliminace a řízení rizik

Cílem řízení rizik je zajistit, aby obchodování, zaujímání pozic a operační aktivity nevystavily instituci ztrátám, ohrožujícím její životaschopnost.

### 1.5.1. Diverzifikace portfolia

Diverzifikace je proces přidání cenných papírů do portfolia za účelem snížení jedinečného rizika portfolia a v důsledku toho i snížení celkového rizika portfolia, protože směrodatná odchylka portfolia bude obecně nižší než průměr směrodatných odchylek cenných papírů v portfoliu. Tržní riziko portfolia bude mít přibližně stejnou hodnotu. Vliv zvyšujícího se počtu cenných papírů na snižování rizika portfolia je znázorněn v Obr. 1.2.

Obr. 1.2. Diverzifikace portfolia



Už jen malá diverzifikace může vést k podstatnému snížení rizika portfolia. Při vhodně diverzifikovaném portfoliu je jedinečné riziko eliminováno a důležité je pouze tržní riziko. Tento stav nastává zhruba při 20 až 30 aktivech v portfoliu. Převažujícím zdrojem nejistoty pro diverzifikovaného investora je proto vzestup nebo pokles trhu, který s sebou unáší portfolio investora.

Diverzifikace funguje proto, že ceny různých cenných papírů se nepohybují vždy jedním směrem (cenové změny akcií jsou méně než dokonale korelovány).

### 1.5.2. Finanční deriváty

Jedním z nástrojů řízení tržního rizika jsou finanční deriváty. Existují také úvěrové deriváty, které jsou nástroji řízení úvěrového rizika. Deriváty ovšem nejsou využívány jen k zajištění rizika, ale jsou také vyhledávány spekulanty jako investice nabízející možnost rychlé realizace vysokých zisků. S tím však také souvisí i možnost velkých ztrát, kdy při nepříznivém vývoji může spekulant snadno přijít i o celou částku investovanou do derivátů.

Finanční deriváty jsou obecně definovány jako finanční instrumenty, jejichž cena je odvozena od ceny podkladového aktiva. Tímto podkladovým aktivem může být například akcie, měna, dluhový cenný papír, komodita či úvěr. Existují také deriváty na počasí (weather deriváty), jejichž podkladovými aktivy jsou veličiny jako teplota, množství srážek nebo vlhkost. Podle kategorií tržního rizika jsou deriváty členěny na finanční (úrokové, akciové, měnové) a komoditní. Podle jiného členění můžeme rozlišit termínové kontrakty (forwardy, futures a swapy) a opční kontrakty.

U termínových kontraktů platí, že obě smluvní strany jsou v těsné pozici (nemají možnost volby) a musí splnit podmínky, na nichž se dohodly. Opční kontrakty jsou takové, u nichž je kupující kontraktu ve volné pozici (má možnost volby) a prodávající je v těsné pozici a musí se řídit přáním kupujícího.

Smlouva mezi kupujícím a prodávajícím finančního derivátu uvádí, že v době realizace (nebo do doby realizace) má kupující právo koupit (nebo prodat) podkladové aktivum za realizační cenu, která je v době uzavření kontraktu známá. Základními parametry finančních derivátů tedy jsou:

- **podkladové aktivum**, což je finanční instrument (rizikový faktor), z něhož je odvozena cena derivátu;
- **realizační cena**, na niž se dohodnou prodávající a kupující, že za ni koupí (prodají) podkladové aktivum v době realizace;
- **moment realizace**, což je okamžik, v němž dochází k vypořádání kontraktu;
- **výplatní funkce** (vnitřní hodnota), která určuje, jaký efekt plyne kupujícímu z kontraktu bez ohledu na to, co na začátku do kontraktu vložil;
- **zisk**, který je efektem kupujícího s ohledem na to, co na začátku zaplatil;
- **cena derivátu**, což je částka, kterou musí kupující zaplatit při uzavření kontraktu.

**Forwardy** jakožto nejstarší druh derivátů představují závazek kupujícího koupit určité množství podkladového aktiva k určitému dni v budoucnosti za stanovenou realizační cenu.

Forwardy jsou obchodovány na OTC trzích (over the counter), nikoli na burzách. Jejich výhodou je, že mohou být „ušity na míru“ co do objemu a splatnosti, naopak nevýhodou je, že protistrany nesou kreditní riziko, že druhá strana nedostojí svým závazkům. Druhou nevýhodou je, že může být obtížné najít kupce kontraktu, protože nejsou obchodovány na sekundárních trzích. Uzavření forwardu je hra s nulovým součtem.

**Futures** se od forwardů liší v tom, že podmínky kontraktů jsou standardizované a že jsou obchodovány na organizovaných trzích (derivátové burzy). Parametry, jichž se týká standardizace, mohou být např. velikost kontraktu, místo dodání, kvalita komodity, termín dodání atd. Každý obchodník s futures musí na svůj účet skládat určité zálohy (margin), čímž se burza jistí před nedodržením závazků obchodníka. Výhodou futures je, že se jedná o jištěný kontrakt a je možné s nimi obchodovat na sekundárním trhu. Nevýhodou naopak může být standardizace kontraktů a skládání záloh.

**Swap** je kontrakt, při jehož uzavření se dvě smluvní strany zavázaly k výměnám určitých podkladových nástrojů v určitých intervalech v budoucnosti. Jde vlastně o dva nebo více forwardů, které jsou navzájem smluvně spojeny. Swapy na rozdíl od forwardů nejsou hrou s nulovým součtem, naopak tím, že se firmy domluví, získají společný efekt, o který se mohou rozdělit.

**Opce** je kontrakt, jeho uzavření - na rozdíl od předcházejících derivátů – představuje pro vlastníka nikoli povinnost, ale právo k nákupu nebo prodeji určitého podkladového aktiva k určitému dni nebo po určitou dobu v budoucnosti za realizační cenu, a pro prodávajícího opce závazek prodat nebo koupit daný nástroj za týchž podmínek. Jedná se o OTC nebo burzovní kontrakt. Podle doby realizace opce dělíme na evropské, kdy je možno opci uplatnit pouze v předem stanovený okamžik, a na americké opce, které můžeme uplatnit kdykoliv do doby realizace. Rozdělení opcí na evropské a americké nemá žádnou geografickou souvislost s těmito kontinenty.

Dále můžeme opce rozdělit na **kupní** opce (call), kdy má kupující opce právo koupit podkladový nástroj za realizační cenu, a na **prodejní** opce (put), jejichž majitel má právo prodat podkladový nástroj za realizační cenu. V době sjednání kontraktu platí kupující opce prodávajícímu částku odpovídající ceně opce (tzv. opční prémii).

### ***Užitek z derivátů***

Pro konečné uživatele v soukromém i veřejném sektoru i pro celé národní ekonomiky jsou deriváty efektivní metodou pro zajištění a řízení expozic vůči úrokovým mírám, měnovým kurzům, cenám akcií a komodit a to při nízkých nákladech.

Mnoho nefinančních institucí nemá odborné schopnosti předvídat budoucí hodnoty tržních veličin. Pro ně, a nejen pro ně, dává smysl zajistit se proti rizikům spojeným s těmito veličinami. Společnosti se potom mohou zaměřit na svoji hlavní činnost a vyhnou se tím nepříjemným překvapením, jako jsou ztráty způsobené změnami měnových kurzů nebo náhlý vzestup ceny kupované komodity.

Rozvoj derivátů způsobil podstatné zvýšení úrovně řízení finančních rizik ve finančních i nefinančních institucích, což přispělo ke zvýšení bezpečnosti, ziskovosti a ke stabilitě těchto institucí. Z tohoto pohledu přispěly deriváty k růstu národních ekonomik a zlepšují pozici podniků v konkurenční globální ekonomice. Jako nástroje řízení rizik snižují pravděpodobnost finančních problémů podniků, čímž stabilizují zaměstnanost. Když se vedení podniků zbaví některých rizik, může se lépe zaměřit na svou hlavní činnost, zlepšovat kvalitu a snižovat náklady na výroby.

Mohutný rozvoj derivátů již způsobil některým institucím obrovské ztráty. Zveřejněné ztráty z derivátů byly vždy způsobeny jejich nesprávným používáním, kdy je subjekty nepoužívaly ke snížení rizik, ale naopak ke spekulaci, čímž rizika zvýšily. Na derivátovém trhu platí, že riziko lze stejně snadno zvýšit i snížit. Nesprávné používání je spojeno s neautorizovaným obchodováním dealerů, s neexistencí systémů měření rizik, s nedoceněním rizik z derivátů ze strany vrcholového vedení či dokonce s chybnými rozhodnutími vrcholového vedení o nadměrném riziku.

Typickým příkladem toho, co může způsobit špatné obchodování s deriváty, je krach nejstarší britské investiční banky Barings.

Protože deriváty usnadňují identifikaci rizik, mají potenciál zvýšit bezpečnost a zdraví finančních institucí a znamenají efektivnější alokaci finančních rizik. Protože však také transformují tato rizika do kombinací, které mohou být složitější, a pokud se nedostatečně pochopí a nesprávně řídí, ohrožují také bezpečnost a zdraví institucí.

### **1.5.3. Hedging**

Hedging (zajištění) je obecně ochranou hodnoty určitého aktiva či portfolia aktiv před dopady systematického rizika. Princip hedgingu spočívá v tom, že k původnímu aktivu (nebo portfoliu aktiv) přikoupíme jiné aktivum či více aktiv (nejčastěji deriváty), a vytvoříme hedgingové portfolio tak, aby jeho změny při pohybu tržních sazeb byly minimální (případně nulové). Prostřednictvím trhu s deriváty je možné tržní riziko distribuovat na další subjekty. Zajištění spoléhá na likvidní trh a nízké transakční náklady.

Hedgingové strategie lze rozlišit podle způsobu eliminace rizika. Tato kritéria jsou:

- faktorově neutrální kritéria (např. delta hedging, gama hedging),
- minimalizace rozptylu,
- minimalizace Value at Risk,
- minimalizace střední hodnoty ztráty,
- maximalizace střední hodnoty funkce užitku.

#### **1.5.4. Regulace finančních rizik**

Činnost finančních institucí je vystavena poněkud odlišným rizikům, než je tomu u ostatních podnikatelských subjektů. Z podstaty finančních činností přímo vyplývá, že struktura rozvahy je odlišná. Kapitál na straně pasiv představuje jen malou část celkové bilanční sumy. Naprostá většina zdrojů jsou přijaté vklady a přijaté úvěry, to znamená cizí zdroje. Na straně aktiv jsou zejména poskytnuté úvěry a nakoupené cenné papíry. Z tohoto pohledu přímo vyplývá zranitelnost finančních institucí. Je-li kapitálový polštář příliš malý, potom problémy na straně aktiv (například nesplácení úvěrů klienty) mají značný dopad na skutečnou hodnotu kapitálu.

Finanční rizika způsobují, že finanční trhy jsou nestabilní, a proto jsou některá rizika regulována. Finanční služby, zejména bankovníctví, je totiž potřeba chápat jako odvětví, jehož problémy mají závažný dopad na celé hospodářství. Selhání bank může způsobit vážné sociální externality. Cílem regulace finančních rizik je:

- zabránit selhání regulované finanční instituce a tím ochránit klienty a jejich vklady,
- zajistit důvěru široké veřejnosti ve finanční systém,
- zajistit bezpečný a zdravý chod bankovního systému,
- podpořit účinný a konkurenceschopný finanční systém,
- podpořit měnovou stabilitu.

Ve vyspělých zemích je hlavní důraz kladen na zajištění bezproblémového chodu bank prostřednictvím bankovního dohledu. Vychází se z toho, že vkladatelé vzhledem k nedostatku informací a znalostí nikdy nemohou ohodnotit rizikovost banky. To za ně činí orgán bankovního dohledu. Přesto existuje ve vyspělých zemích institut pojištění vkladů, aby zajišťoval morální důvěru vkladatelů v banky.

## ***Kapitálová přiměřenost***

Tlaky vkladatelů na omezení rizika finančních institucí jsou nahrazeny konceptem kapitálové přiměřenosti. Ta je založena na předpokladu, že čím více kapitálu finanční instituce má, tím více prostředků do ní vložili nebo nahospodařili akcionáři a tím větší mají zájem na správném chodu společnosti, aby tyto prostředky neztratili, ale naopak aby je maximálně zhodnotili. Zatímco vlastním kapitálem zachycujeme současnou hodnotu subjektu, kapitálovou přiměřeností ohodnocujeme perspektivy finanční instituce do budoucna. Kladná hodnota kapitálové přiměřenosti automaticky znamená solventnost finanční instituce. Solventností se rozumí situace, kdy tržní hodnota rozvahových aktiv je vyšší než tržní hodnota závazků s tím, že počítáme i s podrozvahovými položkami.

Podstatou koncepce kapitálové přiměřenosti je změření rizik daného subjektu při možném nepříznivém vývoji vnějšího ekonomického prostředí a stanovení minimálních kapitálových požadavků odpovídajících těmto rizikům. Spočtená hodnota kapitálu musí být tak velká, aby byly pokryty potenciální ztráty v budoucnosti z dnešních rizik subjektu. Kapitálová přiměřenost je ohodnocením bezproblémového chodu finanční instituce v budoucnosti, je tedy ukazatelem finanční síly a důvěryhodnosti finanční instituce. U institucí s vysokou kapitálovou přiměřeností je vysoce pravděpodobné, že dostojí nejenom všem nynějším, ale i potenciálním závazkům při jakékoliv změně okolního tržního prostředí.

Snahou kapitálové přiměřenosti je, aby veškeré potenciální ztráty v budoucnosti spojené s dnešními riziky byly pokryty vnitřními zdroji společnosti, tedy kapitálem akcionářů. Naopak již existující ztráty by měly být promítnuty do hospodářského výsledku (a tedy také do kapitálu). Znamená to, že případné ztráty finanční instituce mají na prvním místě pocítit akcionáři a nikoliv klienti.

Nižší hodnota kapitálové přiměřenosti znamená v případě problémů pro akcionáře i vkladatele vyšší pravděpodobnost ztráty. V případě příznivých podmínek představuje nižší hodnota kapitálové přiměřenosti pro akcionáře vyšší pravděpodobnost zhodnocení vložených zdrojů, pro vkladatele však nic navíc nepředstavuje, neboť ti dostanou jen své úroky.

Zájem regulátorů a akcionářů je tedy protichůdný, zatímco akcionáři se snaží o nižší hodnotu, regulátoři o vyšší. Porušení limitu kapitálové přiměřenosti je významným signálem problémů banky.

V důsledku globalizace ekonomiky a konkurenčního boje bylo v polovině 80 let minulého století zaznamenáno, že nebezpečně klesá kapitálová vybavenost bank. Výsledkem bylo, že v roce 1988 vydal Basilejský výbor pro bankovní dohled při Bance pro mezinárodní



platby první dokument pro regulatorní měření finančních rizik a pokrytí tohoto rizika kapitálem pod zjednodušeným názvem **BASEL I**. V něm je stanoveno, že banky musí držet kapitál ve výši 8 % výše poskytnutých úvěrů. BASEL I nerozlišuje klienty podle bonity.

Od 1. ledna 2007 je pro banky a obchodníky s cennými papíry povinně zaveden koncept **BASEL II**. Je především reakcí na nastupující trendy v řízení úvěrového rizika, aplikované zejména mezinárodně činnými velkými bankami. Dále je rozšířen záběr bankovní regulace o operační riziko, což je reakcí na bouřlivý rozvoj informačních technologií a rizika z toho vyplývající. V oblasti tržního rizika je konceptem přebrána dosavadní metodika stanovení kapitálového požadavku. Zároveň je bankám umožněno, aby zvolily i jednodušší metody stanovení kapitálových požadavků, pokud se tak rozhodnou.

Konceptem **BASEL II** je nahrazen ten předchozí, podle něhož bylo po bankách vyžadováno, aby držely ke každému rizikovému aktivu konstantní osmiprocentní výši kapitálového požadavku bez ohledu na kvalitu dlužníka. Aplikací BASEL II je umožněno jít jak cestou standardizovaných metod, tak cestou vytváření vlastních modelů - a tím optimalizovat kapitálové požadavky odpovídající rizikovému profilu dané banky.

Výhodou nového konceptu je právě jeho flexibilita ve výběru metod a možnosti ušít kapitálové požadavky na míru jednotlivým bankám podle jejich rizikového profilu. Konceptem BASEL II je podpořena tržní disciplína, neboť jsou zavedeny rozsáhlé požadavky na zveřejňování informací bankami.

Jako regulatorní dokument je BASEL II postaven na třech pilířích. V prvním je stanoven způsob výpočtu minimálních kapitálových požadavků. Druhý je věnován ohodnocení celkové adekvátnosti kapitálové přiměřenosti z pohledu regulátora a zkoumá, jak souvisí tato výše s celkovým rizikovým profilem banky a naplňováním kvalitativních standardů regulátora. Třetí pilíř je zaměřen na tržní disciplínu a formování základů nové kultury předávání informací ohledně rizikového profilu banky investorům a kapitálovým trhům.

Kapitálová přiměřenost je vypočtena jako poměr kapitálu banky (tier 1, tier 2, tier 3) k rizikově váženým aktivům, úvěrovým ekvivalentům mimobilančních položek a k požadovanému krytí tržního rizika kapitálem, tedy

$$KP = \frac{tier\ 1 + tier\ 2 + tier\ 3}{RVA + MBP + KTRK}. \quad (1.9)$$

Tento ukazatel je sledován u všech finančních institucí a obchodníků s cennými papíry a je stanoven v minimální výši 8 %.

**Tier 1** je složen z vlastního kapitálu, ážiových fondů, nerozděleného zisku a rezervních fondů. Od takto vypočteného vlastního kapitálu jsou odečteny některé položky jako neuhrazená ztráta z předchozích let, goodwill, další nehmotná aktiva a nominální hodnota akcií, které jsou v držení banky.

**Tier 2** (dodatkový kapitál) je složen z všeobecných rezerv, které jsou vytvářeny ze zisku a jsou určeny ke krytí ztrát. Do tier 2 jsou zahrnuty i hybridní kapitálové instrumenty, které jsou dluhem a mohou se stát při splnění podmínek základním kapitálem banky. Dále je do tier 2 započítán i termínovaný podřízený dluh, který lze považovat za kapitál pouze po určitou stanovenou dobu (minimálně 5 let), při níž nelze nárokovat jeho vrácení.

**Tier 3** je složen z krátkodobého podřízeného dluhu a je určen ke krytí tržního rizika.

**Rizikově vážená aktiva** jsou jednotlivé druhy aktiv přepočítané váhami rizikovosti, kterými jsou brány v úvahu úvěrová a tržní rizika. Doporučené váhy jsou 0, 20, 50 a 100 %, ale jednotlivými regulujícími orgány mohou být doporučeny i jiné váhy. Důležité je správné přidělení vah. Výpočet kapitálové přiměřenosti je závislý na tom, jakou strukturu aktiv dle rizikovosti daná banka má. Může se totiž stát, že banka s vyššími celkovými aktivy a stejným kapitálem je na tom lépe než jiná banka, protože má nižší rizikově vážená aktiva.

**Úvěrové ekvivalenty mimobilančních položek** jsou např. vystavené záruky, otevřené akreditivy a při jejich výpočtu postupujeme stejně jako u rizikově vážených aktiv, přepočteme je faktory konverze, které jsou stanoveny institucí regulace a pohybují se v rozmezí od 0,01 do 1,00.

Do **krytí tržního rizika kapitálem** jsou zahrnuty finanční deriváty a další mimobilanční položky, které jsou citlivé na pohyby tržních sazeb. Při jeho výpočtu postupujeme obdobně jako u úvěrových ekvivalentů mimobilančních položek.

Výše ukazatele kapitálové přiměřenosti je přímo úměrně závislá na výši kapitálu a nepřímo úměrně na výši rizikově vážených aktiv, úvěrových ekvivalentů mimobilančních položek a výši krytí tržního rizika. Výše kapitálové přiměřenosti může být bankou ovlivněna změnou kapitálu nebo změnou některé ze tří položek ve jmenovateli zlomku v rovnici (1.9).

## 2. Popis použití metodologie Value at Risk portfolia finančních aktiv

### 2.1. Value at Risk

Value at Risk (VaR, někdy také překládáno jako hodnota v riziku nebo ohrožená hodnota) je velmi rozvinutou a prakticky využívanou metodou sloužící k eliminaci potenciálních velkých ztrát. Hlavní výhodou této metody je, že pomocí ní jsou všechna rizika převedena na společného jmenovatele, změnu hodnotu portfolia finančních aktiv, a je poskytnuto jedno číslo, které sumarizuje celkové riziko portfolia. Jeho průkopníkem byla americká banka J.P. Morgan. Ukazatel VaR je velmi často využíván také díky tomu, že je jednoduché porozumět jeho interpretaci.

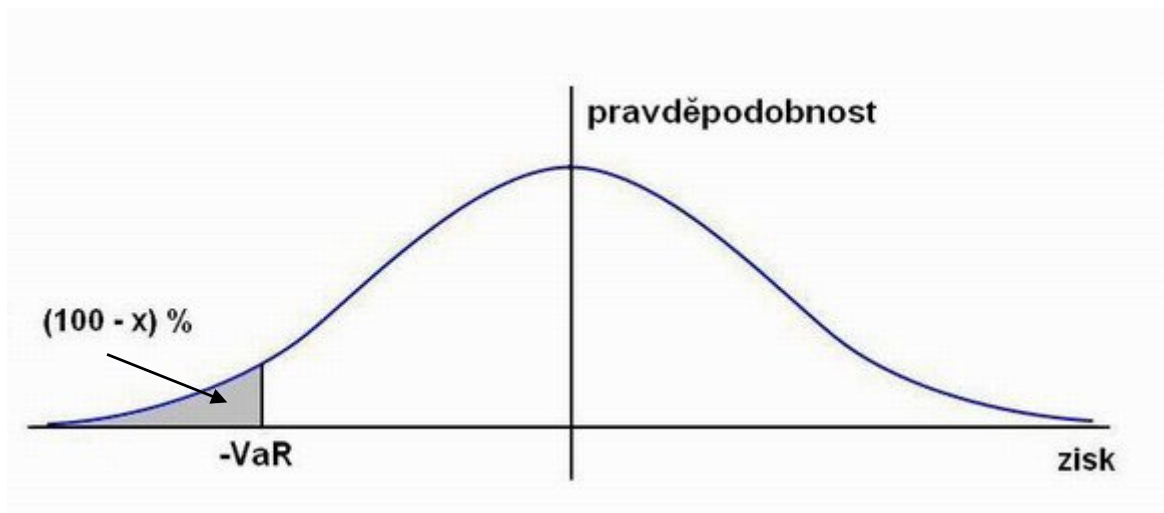
#### 2.1.1. Definice VaR

Value at Risk je prezentována jako potenciální ztráta s určitou pravděpodobností během určité následující doby držení, stanovené na základě určitého historického období, kterou může mít instituce u svého portfolia při nepříznivých tržních změnách. Matematicky je definována jako jednostranný kvantil (například 99 %) z rozdělení zisků a ztrát portfolia během určité doby držení (například deset dnů), stanovený na základě určitého historického období (například jeden rok).

Při interpretaci VaR můžeme konstatovat, že jsme si na  $x$  procent jisti, že neztratíme více než  $VaR$  peněžních jednotek během následujících  $n$  dnů. Value at Risk je funkcí dvou parametrů: časového horizontu ( $n$  dnů) a hladiny spolehlivosti ( $x$  procent). Je to úroveň ztráty, která s pravděpodobností  $x$  procent nebude přesažena. VaR můžeme definovat také jako ztrátu odpovídající  $(100 - x)$  – tému percentilu rozdělení pravděpodobnosti změny v hodnotě portfolia během následujících  $n$  dnů. (Zisky jsou zde kladné změny, ztráty jsou záporné změny). Například je-li  $n = 5$  a  $x = 97 \%$ , pak VaR je třetí percentil rozdělení pravděpodobnosti změny v hodnotě portfolia během následujících 5 dnů.

V Obr. 2.1 je VaR ilustrován v situaci, kdy má změna hodnoty portfolia přibližně normální rozdělení. Jak už bylo zmíněno, VaR je  $(100 - x)$  – tý percentil tohoto rozdělení.

Obr. 2.1: Určení VaR z rozdělení pravděpodobnosti změny hodnoty portfolia na hladině spolehlivosti  $x\%$



Výše uvedená definice VaR představuje **absolutní VaR**. Kromě toho je ještě používán například **marginální VaR**. Marginální VaR je mírou toho, o kolik vzroste absolutní VaR portfolia při přidání nebo vynětí nástroje. Tuto míru je možné využít ke stanovení instrumentu, který nejvíce přispívá k celkovému riziku portfolia.

VaR je nutné stanovit pro celou řadu dob držení. I když použití krátkých časových horizontů (např. jeden den) může být užitečné pro každodenní řízení rizik, obezřetní manažeři stanoví také VaR pro delší doby držení, protože použití krátkých časových horizontů je založeno na předpokladu, že trh bude vždy dostatečně likvidní, aby bylo možné uzavřít pozice za minimálních ztrát.

Za krizové situace na trhu může být zhoršen přístup této instituce na trh a nemusí být možné uzavření nebo zajištění pozic s výjimkou extrémně nepříznivých cen. Potom bude nutné držet pozice déle, než se původně předpokládalo. Takovým neočekávaným prodloužením doby držení je způsobeno zvýšení rizikovosti oproti původnímu předpokladu, neboť pravděpodobnost velkých cenových změn se zvyšuje s dobou držení, a rizikový profil některých nástrojů (například opcí) je značně ovlivněn tím, jak se snižuje zbytková splatnost nástroje.

Finanční instituce (např. banky) používají jednodenní dobu držení, protože delší doba není vhodná vzhledem k dynamickému charakteru složení portfolia. Naopak investiční manažeři obvykle používají jednoměsíční dobu držení a podniky dokonce čtvrtletní nebo roční období.

Je nutno zdůraznit, že VaR v žádném případě nepředstavuje maximální možnou ztrátu, ani neříká nic o velikostech ztrát, které mohou nastat s nižší než zvolenou pravděpodobností. Ty nejenže mohou VaR mnohonásobně převyšovat, ale u dvou portfolií se stejným VaR se mohou výrazně lišit. VaR spočítaný na jedné zvolené hladině pravděpodobnosti tedy neumí rozlišit dvě portfolia s velmi rozdílným rizikovým profilem na nízkých hladinách pravděpodobnosti. Proto je vhodné nesledovat VaR pouze na jedné hladině pravděpodobnosti, ale vyčíslovat potenciální ztráty na různých extrémních hladinách pravděpodobnosti.

### 2.1.2. Obecné odvození VaR

Základní úvaha při stanovení Value at Risk vychází z toho, aby pravděpodobnost, že z portfolia aktiv bude zisk  $(\Delta\tilde{\Pi})$  menší než předem stanovená hladina zisku  $(ZISK)$ , byla rovna stanovené hladině pravděpodobnosti  $\alpha$  (významnosti), například 5 %. Vztah mezi hladinou významnosti  $\alpha$  a hladinou spolehlivosti  $x$  je takový, že  $\alpha + x = 1$ .

VaR tedy znamená ztrátu a vycházíme z toho, že zisk můžeme zapsat jako zápornou ztrátu. Formálně lze tedy uvedenou myšlenku zapsat jako

$$\Pr(\Delta\tilde{\Pi} \leq +ZISK) = \alpha. \quad (2.1)$$

Vzhledem k tomu, že úroveň rizika je v metodě Value at Risk vyjádřena jako ztráta, představuje VaR hodnotu této ztráty. Je-li zisk vyjádřen jako záporná ztráta  $(ZISK = -VaR)$ , můžeme rovnici (2.1) modifikovat takto,

$$\Pr(\Delta\tilde{\Pi} \leq -VaR) = \alpha, \quad (2.2)$$

což je základní rovnice pro odvození hodnoty VaR. Je tedy zřejmé, že je nezbytné určit sdružené rozdělení pravděpodobnosti přírůstku hodnoty portfolia aktiv  $(\Delta\tilde{\Pi})$  a z toho odvodit hodnotu VaR pro dané  $\alpha$ .

Při následujícím výpočtu hodnoty VaR vycházíme z předpokladů, že stanovujeme VaR pro portfolio aktiv a že přírůstek hodnoty portfolia aktiv je vyjádřen pomocí výnosů,

$$\Delta\tilde{\Pi} = \tilde{V}_T - V_t = V_t \cdot \tilde{r}_p = \sum_i x_i \cdot \tilde{r}_i, \quad (2.3)$$

kde  $V_t$  je výchozí hodnota portfolia,  $\tilde{V}_T$  je predikovaná hodnota portfolia,  $\tilde{r}_p$  je náhodný výnos portfolia,  $x_i$  je absolutní množství peněz vložených do  $i$ -tého aktiva,  $\tilde{r}_i$  je náhodný výnos  $i$ -tého aktiva. Dalším předpokladem je, že náhodné výnosy aktiv se chovají dle normálního rozdělení.

Analytické stanovení hodnoty VaR, za uvedených předpokladů, lze odvodit následovně. Podle rovnice (2.2) platí

$$\Pr(\Delta\tilde{\Pi} \leq -VaR) = \alpha,$$

zavedeme substituci

$$\tilde{g} = \Delta\tilde{\Pi} + VaR \quad (2.4)$$

a po dosazení do rovnice (2.2) a normalizaci dostaneme, že

$$\Pr\left[\frac{\tilde{g} - E(\tilde{g})}{\sigma(\tilde{g})} \leq \frac{0 - E(\tilde{g})}{\sigma(\tilde{g})}\right] = \alpha. \quad (2.5)$$

Pro distribuční funkci normovaného rozdělení ( $\Phi$ ) platí, že

$$\Pr(\tilde{z} \leq u) = \alpha, \quad (2.6)$$

což se dá zapsat jako  $\Phi(u) = \alpha$  a upravit na

$$u = \Phi^{-1}(\alpha). \quad (2.7)$$

Dosadíme-li za výraz  $u$  v rovnici (2.7) výraz  $\frac{0 - E(\tilde{g})}{\sigma(\tilde{g})}$  z rovnice (2.5), dostaneme

$$\frac{0 - E(\tilde{g})}{\sigma(\tilde{g})} = \Phi^{-1}(\alpha). \quad (2.8)$$

Na závěr po zpětné substituci  $\tilde{g}$  z rovnice (2.4) do (2.8) dostaneme obecný vzorec pro analytické vyjádření hodnoty VaR,

$$VaR = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(\Delta\tilde{\Pi}) - E(\Delta\tilde{\Pi}). \quad (2.9)$$

V některých aplikacích metody Value at Risk předpokládáme, že střední hodnota výnosů aktiv (a tedy i portfolia) je nulová. Empiricky byla tato skutečnost ověřena zejména u krátkodobých výnosů, tj. denních, týdenních a měsíčních. Vztah (2.9) je pak modifikován takto,

$$VaR = -\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma(\Delta\tilde{\Pi}). \quad (2.10)$$

Předchozí obecnou rovnici (2.10) pro VaR lze aplikovat pro nesymetrické rozdělení pravděpodobnosti. Pokud však parametrické rozdělení pravděpodobnosti je symetrické, jako je tomu u normálního rozdělení, pak vzhledem k tomu, že  $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , lze provést modifikaci předchozích obecných rovnic následovně,

$$VaR = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \cdot \sigma(\Delta\tilde{\Pi}) - E(\Delta\tilde{\Pi}), \text{ nebo} \quad (2.11)$$

$$VaR = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \cdot \sigma(\Delta\tilde{\Pi}). \quad (2.12)$$

Poslední výraz (2.12) je nejčastěji uváděným tvarem pro stanovení hodnoty VaR.

### 2.1.3. Metody modelů Value at Risk

Existují různé metody odhadu VaR. Tyto metody se liší:

- v metodách simulace změn rizikových faktorů,
- v metodách transformace změn rizikových faktorů na změnu hodnoty portfolia.

Většina metod výpočtu VaR předpokládá statické portfolio. Existují tři hlavní metody stanovení VaR, a to metoda variancí a kovariancí, metoda historické simulace a metoda simulace Monte Carlo.

#### *Metoda variancí a kovariancí*

Tato metoda, někdy také nazývaná parametrická metoda, využívá k odhadu potenciálních ztrát portfolia historických statistik o volatilitách hodnot a o korelacích mezi těmito hodnotami.

Metoda variancí a kovariancí je založena na určitém rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů a předpokládaných korelacích mezi nimi. Parametrický přístup je založen na předpokladu, že rozdělení budoucích výnosů náleží do určité parametrické skupiny. Nejjednodušší forma parametrické metody předpokládá, že změny rizikových faktorů mají normální rozdělení a že korelace mezi změnami rizikových faktorů jsou stabilní.

Model má velké informační požadavky. Například i za předpokladu normality u šesti aktiv je třeba dvacet sedm parametrů (šest průměrů, šest variancí a patnáct kovariancí). Kromě toho je využíváním pouze historických údajů vyloučeno použití důležitých dostupných informací, které je možné vzít v úvahu náhodnými korekcemi koeficientů nebo používáním náhodných vah při odhadu těchto koeficientů.

Údajům z minulosti je možné přiřadit stejné váhy nebo bližším údajům přiřadíme vyšší váhy, čímž utlumíme větší změny ve volatilitách a v korelacích dávných událostí. U nestejných vah používáme dvou skupin metod, a to skupiny modelů GARCH a skupiny modelů EWMA. Tyto metody budou podrobněji popsány v kapitole 2.3.

#### *Metoda historické simulace*

U této metody jsou potenciální budoucí ztráty počítány na základě údajů o minulých hodnotách, konkrétně na základě ztrát, které by v minulosti dané portfolio utrpělo. Zatímco

u parametrické metody interval spolehlivosti počítáme statisticky (například předpokládáme, že výnosy jsou normálně rozděleny a že korelace mezi rizikovými faktory jsou konstantní), v případě historické simulace jsou simulovány potenciální ztráty bez zavádění jakýchkoliv předpokladů o rozdělení.

Výhodou historické simulace je, že nečiní žádné předpoklady na rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů. Nepředpokládá ani žádné stabilní korelace mezi rizikovými faktory. Nevýhodou je potřeba dostatečného počtu historických simulací.

Historickou simulací jsou počítány změny hodnoty portfolia na základě skutečných historických hodnot rizikových faktorů. Výstupem historické simulace je časová řada zisků a ztrát, ke kterým by došlo, pokud by portfolio bylo drženo po určité období v minulosti.

Není také třeba stanovit variance a kovariance každého rizikového faktoru. Model rovněž nemá problémy s nelinearitami jako jsou například opce. Historickou simulací jsou lépe zahrnuty konce rozdělení pravděpodobnosti. Znamená to, že extrémní tržní změny jsou lépe zachyceny historickou simulací než parametrickými modely VaR. Problémem metody je, že nejsou plně využity dostupné informace. Výsledek je poněkud závislý na výskytu řídkých událostí. Předpokladem je velký počet historických údajů.

### ***Metoda Monte Carlo***

Třetí metodou je metoda simulace Monte Carlo (stochastická simulace), kdy k odhadu VaR používáme velký počet simulací vývoje hodnoty portfolia. Ten je určen velkým počtem náhodně generovaných rizikových faktorů, u nichž existují známá rozdělení. Simulací mohou být generovány vysoce pravděpodobné odhady VaR. Scénáře mohou obsahovat nejnovější informace a historické údaje je možné použít jako vstupní parametry pro simulace. Metoda testuje jednodenní změnu hodnoty portfolia na základě velkého počtu náhodně zvolených kombinací různých situací rizikových faktorů, přičemž pravděpodobnosti jsou založeny na historické zkušenosti.

Tato metoda je flexibilní a užitečná zejména u nástrojů s nelineárním průběhem hodnot, jako jsou například opce. Metoda Monte Carlo modeluje stochastické procesy, tedy procesy zahrnující lidskou volbu či procesy s neúplnými informacemi. Procesy jsou simulovány generováním náhodných čísel.

Metoda historické simulace a metoda Monte Carlo jsou si velmi podobné, protože obě přeceňují nástroje na základě daných hodnot rizikových faktorů. Rozdíl je pouze v tom, jak generují rizikové faktory. Metoda Monte Carlo generuje náhodné scénáře, zatímco historická



simulace vychází ze scénářů v minulosti. Obě metody jsou na rozdíl od metody variancí a kovariancí vhodné i pro nelineární opční portfolia.

## 2.2. Modelování tržní ceny akcie

Pro modelový popis jevů náhodně se měnících v čase, jako je úroveň úrokových sazeb nebo ceny akcií, jsou většinou používány náhodné (stochastické) procesy. Pod označením **náhodný proces** míníme libovolnou veličinu, která se mění náhodným způsobem v čase (u vícerozměrných náhodných procesů je těchto veličin několik). Přestože jsou údaje měřené v čase ve financích zaznamenávány v diskrétních časových okamžicích (například v jednotlivých obchodních dnech) a v diskrétních jednotkách (například na celé koruny nebo na setiny procenta označované jako bazické body), pro jejich modelový popis jsou často voleny spojitě náhodné procesy (s hodnotami ze spojitého intervalu) ve spojitém čase.

### *Výběr modelu*

Je-li stochastický proces vybraný pro popis vývoje ceny nerealistický, bude takový také odhad VaR. Proto je výběr podkladového procesu obzvláště důležitý. Geometrický Brownův pohyb v rovnici

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.12)$$

popisuje chování některých finančních instrumentů jako například ceny akcií a měnové kurzy, ale určitě nepopisuje instrumenty s pevnými příjmy. V geometrickém Brownově modelu nejsou cenové šoky a ceny se vyvíjejí náhodně. To nemůže reprezentovat cenu obligace, která se musí blížit k její nominální hodnotě v době splatnosti.

K modelování náhodných procesů ve financích jsou využívány především Markovské náhodné procesy. U těchto procesů je jedinou relevantní hodnotou pro předpověď budoucích hodnot procesu jejich současná hodnota bez ohledu na minulé hodnoty procesu. Záznamy minulých hodnot jsou však důležité pro statistické určení parametrů modelu při jeho konstrukci. Konkrétní trajektorie minulých hodnot je pak ve zkonstruovaném modelu zcela irelevantní pro předpověď.

Nejčastěji využívaným Markovským procesem je Wienerův proces, někdy také označován jako **specifický Wienerův proces**. Je využíván nejen ve financích, ale např. taky ve fyzice. Specifický Wienerův proces  $\Delta z$  je proces, kterým je popsán vývoj proměnné z normálního rozdělení. Aby se nějaká veličina řídila specifickým Wienerovým procesem,

musí splňovat dva předpoklady, které můžeme vyjádřit pomocí přírůstku  $\Delta z$  této veličiny v krátkých časových intervalech  $\Delta t$ , a to

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) . \quad (2.13)$$

V následných úvahách pak intervaly  $\Delta t$  přecházejí na intervaly  $dt$  nekonečně malé délky.

Pro tyto předpoklady platí, že

- mezi libovolnými odpovídajícími si přírůstky  $\Delta z$  a  $\Delta t$  platí vztah

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} , \quad (2.14)$$

kde  $\varepsilon$  je náhodná veličina z normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ ,

- přírůstky  $\Delta z$  pro libovolné disjunktní intervaly jsou navzájem nezávislé.

Z prvního předpokladu plyne, že také přírůstek  $\Delta z$  má normální rozdělení s momenty

$$E(\Delta z) = 0 , \quad (2.15)$$

$$\text{var}(\Delta z) = \Delta t , \quad (2.16)$$

$$\sigma(\Delta z) = \sqrt{\Delta t} . \quad (2.17)$$

Z druhého předpokladu plyne, že specifický Wienerův proces je opravdu Markovský.

Předchozí vlastnosti se dají přenést na přírůstky  $z(T) - z(0)$  specifického Wienerova procesu pro delší časové intervaly. Rozdělíme totiž interval  $(0, T)$  na  $N$  krátkých intervalů stejné délky  $\Delta t$  a můžeme napsat

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} . \quad (2.18)$$

Odtud již plyne, že také přírůstek  $z(T) - z(0)$  má normální rozdělení s momenty

$$E[z(T) - z(0)] = 0 , \quad (2.19)$$

$$\text{var}[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T , \quad (2.20)$$

$$\sigma[z(T) - z(0)] = \sqrt{T} . \quad (2.21)$$

Je vidět, že rozptyl přírůstků specifického Wienerova procesu je roven přímo délce odpovídajícího časového intervalu.

V klasickém deterministickém kalkulu je v přírůstcích typu  $\Delta y / \Delta x$  prováděn limitní přechod  $\Delta t \rightarrow 0$  k infinitezimálním hodnotám  $dy / dx$ . Podobně také u Wienerova procesu při  $\Delta t \rightarrow 0$  přechází rovnice (2.14) do tvaru

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt} . \quad (2.22)$$

Pomocí specifického Wienerova procesu  $z$  je možné definovat Brownův aritmetický proces, někdy taky nazývaný zobecněný Wienerův proces jako

$$dx = a dt + b dz, \quad (2.23)$$

kde  $a$  je **trendový** koeficient (drift rate) a  $b$  je **difúzní** koeficient (diffusion rate). Zobecněným Wienerovým procesem je popsán vývoj normálně rozdělené proměnné s trendovým koeficientem  $a$  za časovou jednotku a difúzním koeficientem  $b$  za časovou jednotku, kde  $a$  a  $b$  jsou konstantní.

Je zřejmé, že cena se vyvíjí lineárním trendem, přičemž jednotlivé momenty jsou

$$E(dx) = \alpha \cdot dt, \quad (2.24)$$

$$E(x_T) = x_0 + \alpha \cdot T, \quad (2.25)$$

$$\text{var}(dx) = \sigma^2 \cdot dt, \quad (2.26)$$

$$\text{var}(x_T) = \sigma^2 \cdot T. \quad (2.27)$$

Brownův geometrický proces, u něhož se cena vyvíjí exponenciálním trendem, je určen jako

$$dx = \alpha \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz, \quad (2.28)$$

což se dá zapsat i tak, aby byla patrná interpretace jednotlivých parametrů celého procesu,

$$\frac{dx}{x} = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot dz. \quad (2.29)$$

Je zřejmé, že tento proces je vhodný pro vyjádření výnosu a že  $\alpha$  představuje průměrný výnos, zpravidla za období jednoho roku, a  $\sigma$  pak směrodatnou odchylku za rok.

Zobecněný Wienerův proces  $x$ , jehož trendový a difúzní koeficient nejsou v čase konstantní, ale závisejí na hodnotě tohoto procesu  $x$  a na čase  $t$ , je někdy nazýván jako Itoův (difúzní) proces a bývá zapisován takto,

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (2.30)$$

s trendovým koeficientem  $a(x, t)$  a difúzním koeficientem  $b(x, t)$ . Změny v hodnotě  $x$  za velmi krátký časový okamžik jsou, za dobré aproximace, normálně rozděleny, ale pokud se mění v delším časovém horizontu, jsou náchylné k nenormalitě.

K difúznímu procesu se váže Itoova lemma, podle níž pro libovolnou dostatečně hladkou funkci  $G = f(x, t)$  platí

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz, \quad (2.31)$$

kde  $dz$  je ten stejný Wienerův proces jako v rovnici (2.30). Libovolná funkce difúzního procesu je tedy také difúzním procesem s trendovým koeficientem

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \quad (2.32)$$

a s difúzním koeficientem

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2. \quad (2.33)$$

### ***Geometrický Brownův pohyb s logaritmickými cenami***

Pro modelování tržní ceny akcie je často využíván postup založený na Wienerově procesu. Jestliže tržní cenu akcie v čase  $t$  označíme jako  $S$ , pak příslušný zobecněný Wienerův proces se většinou aplikuje ve tvaru

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad (2.34)$$

kde průměrný výnos  $\mu$  a směrodatná odchylka  $\sigma$  jsou konstanty. Aplikujeme-li na tento proces Itoovu lemmu, dostaneme

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz. \quad (2.35)$$

Řídí-li se cena akcie  $S$  podle procesu rovnice (2.34), použijeme Itoovu lemmu k odvození procesu  $\ln S$ . Zavedeme substituci  $G = \ln S$ .

Derivace jednotlivých členů rovnice (2.35) jsou

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Po jejich dosazení do rovnice (2.35) dostaneme

$$dG = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (2.36)$$

Proměnnou  $G$  zpátky nahradíme  $\ln S$  a dostaneme vztah

$$d \ln S = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (2.37)$$

Je-li

$$d \ln S = \ln S_{t+dt} - \ln S_t = \ln \frac{S_{t+dt}}{S_t} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \cdot dz,$$

pak po úpravách můžeme vyjádřit výsledný vztah pro modelování tržní ceny akcie  $S_{t+dt}$  takto,

$$S_{t+dt} = S_t e^{\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz}. \quad (2.38)$$

Protože jsou  $\mu$  a  $\sigma$  konstantní, řídí se také  $G = \ln S$  zobecněným Wienerovým procesem. Má konstantní trendový koeficient  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  a konstantní difúzní koeficient  $\sigma^2$ . Změna v  $\ln S$  mezi časem 0 nějakým budoucím časem  $T$  má proto normální rozdělení se střední hodnotou  $\mu - \frac{\sigma^2}{2} T$  a rozptylem  $\sigma^2 T$ . To znamená, že

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \Phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \text{ nebo} \quad (2.39)$$

$$\ln S_T \sim \Phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right], \quad (2.40)$$

kde  $S_T$  je cena akcie v budoucím čase  $T$ ,  $S_0$  je cena akcie v čase 0 a  $\phi(m, s)$  označuje normální rozdělení se střední hodnotou  $m$  a směrodatnou odchylkou  $s$ . Protože přirozený logaritmus tržní ceny akcie má podle rovnice (2.40) normální rozdělení, řídí se v rámci tohoto modelu tržní cena akcie logaritmicko-normálním rozdělením. Navíc vzhledem k tomu, že směrodatná odchylka  $\ln S_T$  je lineární funkcí  $\sqrt{T}$ , narůstá nejistota ohledně budoucího chování logaritmu tržní ceny akcie úměrně s odmocninou časového horizontu, pro který toto chování předpovídáme.

Z vlastností logaritmicko-normálního rozdělení můžeme odvodit momenty tržní ceny akcie, především střední hodnotu

$$E(S_T) = S \cdot e^{\mu(T-t)} \quad (2.41)$$

a rozptyl

$$\text{var}(S_T) = S_t^2 \cdot e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1). \quad (2.42)$$

## 2.3. Volatilita

Volatilita tržní proměnné představuje nejistotu ohledně budoucí hodnoty této proměnné. Pro řízení rizik je důležité monitorovat volatility tržních proměnných za účelem vyhodnocení potenciálních ztrát.

Volatilita  $\sigma$  je definovaná jako směrodatná odchylka výnosů proměnné za časový úsek. Je-li volatilita použita pro oceňování opcí, časovou jednotkou je obvykle jeden rok, pokud je volatilita použita v řízení rizik, časovým úsekem je obvykle jeden den, takže volatilita je směrodatná odchylka spojitých výnosů za den.

Jednoduchým způsobem určení volatility může tzv. historická volatilita, to znamená volatilita určená z historických dat, u níž předpokládáme, že v budoucnu zůstane stejná. Jejím použitím při výpočtu VaR tak získáváme hodnotu VaR, jaká by byla v minulosti, její vypovídací schopnost o budoucnosti je však malá. Dojde-li například v následujícím období k dramatickému růstu volatility, bude potenciální ztráta výrazně vyšší než kolik je dáno hodnotou VaR. Nezbytností pro zpřesnění výpočtu je proto nějakým způsobem odhadnout budoucí vývoj volatility.

Zřejmě nejběžnějším způsobem předvídání volatility jsou tzv. klouzavé průměry, pomocí nichž se snažíme na základě dosavadního vývoje prodloužit trend a získat tak odhad budoucího kolísání cen finančních instrumentů. Tyto předpovědi však nejsou příliš spolehlivé, protože jedna extrémní hodnota může způsobit velké zkreslení odhadu.

Vylepšením klouzavých průměrů jsou exponenciální klouzavé průměry, které vliv jedné extrémní hodnoty zmírňují. Jsou založeny na principu, že jednotlivá pozorování mají různou váhu. Zatímco váha novějších pozorování je větší, údaje více do minulosti mají menší váhy a tudíž výpočet ovlivňují méně.

Nejčastěji používané jsou přístupy založené na rodině modelů ARCH, konkrétně jde o model **GARCH**. Zkratka GARCH znamená „generalized autoregressive conditional heteroscedasticity“, což je možné volně přeložit jako zobecněný model změn podmíněného rozptylu. Časové řady jsou charakterizovány změnami podmíněného rozptylu, jestliže obsahují období vysoké volatility, které se střídají s obdobími malých výkyvů. GARCH je pouze jedním z široké rodiny modelů ARCH. Pro předpovídání volatility lze použít různé modely.

Předpovídání volatility pomocí modelu GARCH (1,1) je vyjádřeno následující rovnicí

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + a\varepsilon_t^2 + b\sigma_t^2, \quad (2.43)$$

kde  $\sigma_{t+1}^2$  vyjadřuje predikci rozptylu na čas  $t+1$ ,  $\sigma_t^2$  je rozptyl v čase  $t$  (dnešní rozptyl),  $\varepsilon_t$  představuje novou informaci v čase  $t$ . Proměnné  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  jsou parametry, které je potřeba odhadnout. Volatilitu pak jednoduše vypočítáme jako odmocninu z rozptylu. Výše uvedená rovnice (2.43) nám tedy dává informaci, že podle modelu GARCH (1,1) je zítřejší volatilita závislá na dnešní hodnotě volatility a na dnešní nové informaci z finančních trhů (což je obvykle substituováno dnešní procentní změnou kurzu). Parametry  $a, b$  odhadneme tak, že za ně budeme volit různá čísla a budeme hledat takové jejich hodnoty, při kterých volatilita určená modelem nejvíce odpovídá skutečnosti.

Zvláštním případem modelu GARCH (1,1) je model **EWMA** (exponentially weighted moving average – exponenciálně vážený klouzavý průměr) s jedním parametrem  $\lambda$ , u něhož je  $\omega = 0$ ,  $a = 1 - \lambda$ ,  $b = \lambda$ , tedy  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Parametr  $\lambda$  bývá označován jako tlumicí (decay) faktor.

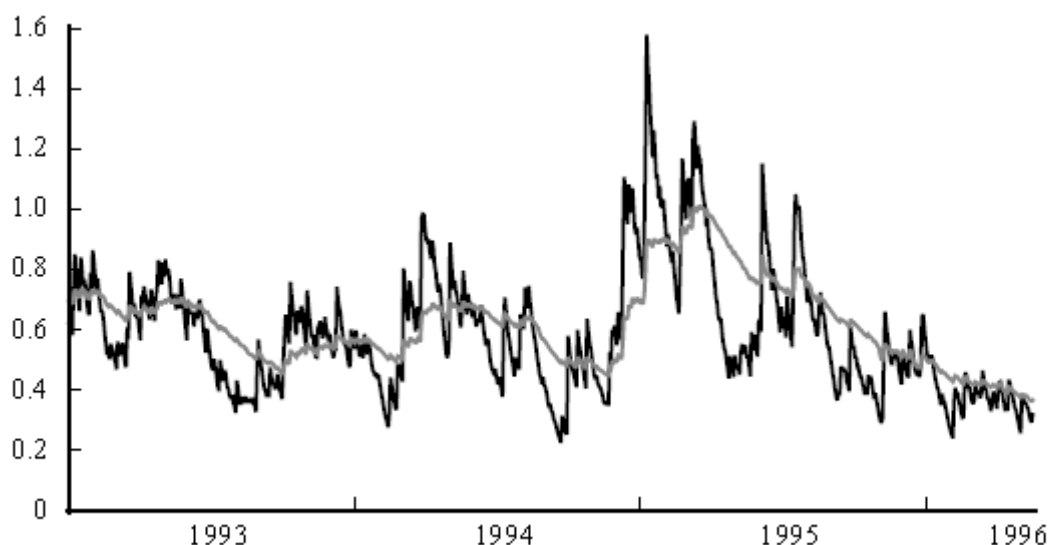
Rozptyl je pak odhadnut jako

$$\sigma_{t+1,t}^2 = (1 - \lambda) \cdot w^2 + \lambda \cdot \sigma_{t,t-1}^2. \quad (2.44)$$

Výhodou modelu EWMA oproti modelu GARCH je snadnější odhad a predikce rozptylu a také to, že není nutné udržovat řady historických údajů.

Význam tlumicího faktoru v odhadu volatility pomocí modelu EWMA je zobrazen v následujícím Obr. 2.2, kde na horizontální ose jsou roky a na vertikální ose směrodatná odchylka. Jedná se o jednodenní predikci volatility výnosů měnové kurzu USD/DEM. Jeden odhad volatility byl učiněn s tlumícím faktorem  $\lambda = 0,85$  (černá linie) a druhý odhad s  $\lambda = 0,98$  (šedá linie). Čím blíže je tlumicí faktor blíže jedné, tím méně je odhad volatility citlivý na novější data.

*Obr. 2.2: Odhad volatility s různým tlumícím faktorem*



*Zdroj: RiskMetrics – Technical Document (1996)*

Podle očekávání je křivka odhadu volatility založena na více historických údajích hladší než ta, která spoléhá na mnohem méně dat.

Další často používanou metodou je přístup založený na předpovídání budoucí volatility na základě cen opčních kontraktů, tzv. **implikovaná volatilita** (implied volatility). Známe-li cenu příslušné opce, je možné s použitím Black – Scholesova modelu oceňování opcí vypočítat volatilitu, jakou investoři očekávají pro následující období. Všechny instrumenty na peněžních a kapitálových trzích však nejsou podkladovým aktivem pro opce, proto je využitelnost implikované volatility pro predikci budoucí míry proměnlivosti velice omezená.

## **2.4. Simulace Monte Carlo**

Simulační techniky aproximují vývoj cen finančních instrumentů použitím počítačových simulací k vytvoření náhodného vývoje ceny. Numerická simulace byla poprvé využita vědci zabývajícími se atomovou bombou v roce 1942 při řešení problému, který nemohl být řešen tradičními postupy. Název Monte Carlo byl odvozen od jména slavného kasina založeného na jihu Francie (dnes Monako).

Simulační metody jsou využity k simulaci mnoha druhů různých scénářů hodnoty portfolia k cílovému datu. Tyto scénáře mohou být generovány náhodným způsobem (v simulaci Monte Carlo), nebo z historických údajů (jako historická simulace). Value at Risk



portfolia pak můžeme určit přímo z grafu rozdělení pravděpodobnosti simulovaných hodnot portfolia.

Díky své flexibilitě je simulační metoda nejefektivnější přístup ke stanovení Value at Risk. Potenciálně může být realizována pro široký okruh rizik, včetně cenového rizika, rizika volatility a nelineárních expozic. Simulace může být použita na dlouhé časové horizonty, což je důležité pro měření kreditního rizika. Také může měřit operační riziko.

Tento přístup však vyžaduje nákladné investice do intelektuálního a systémového vývoje. Také je nutná podstatně vyšší početní výkonnost než u jednodušších metod. Časové požadavky jsou však postupně snižovány díky pokroku v oblasti výpočetní techniky.

Základním konceptem metody Monte Carlo je simulovat opakovaně náhodný proces pro finanční proměnné pokrývající široký okruh možných situací. Tyto proměnné jsou generovány ze specifikovaného rozdělení pravděpodobnosti, o kterém předpokládáme, že jej známe. Takto nám simulace vytvoří úplné rozdělení pravděpodobnosti hodnot portfolia.

#### 2.4.1. Simulace jedné náhodné proměnné

Prvním a rozhodujícím krokem v průběhu simulace je výběr specifického stochastického modelu pro chování cen finančních aktiv. Pro akcie a měny je nejčastěji využíván **geometrický Brownův pohyb**.

##### *Generování náhodných čísel*

Simulace Monte Carlo je založena na náhodném výběru proměnných  $\varepsilon$  z požadovaného rozdělení pravděpodobnosti. Numerická analýza běžně obsahuje dva kroky.

Prvním stavebním kamenem pro generátor náhodných čísel je rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti v intervalu od nuly do jedné, které poskytuje náhodné proměnné  $x$ . Přesněji řečeno, jsou tato čísla **pseudonáhodná**, neboť jsou generována algoritmem podle předdefinovaných pravidel a tento algoritmus je sestaven tak, aby výsledky splňovaly zvolené testy náhodnosti. Algoritmy zpravidla vycházejí z určité báze. Tou bývá často aktuální čas měřený v nepatrných jednotkách (zlomky sekundy). To způsobuje, že v případě opakování procedury bývají výsledky různé. Pokročilejší produkty však umožňují bázi nastavit. Tím je zaručeno, že v případě potřeby mohou být vygenerovány stejné „náhodné“ prvky.

Dalším krokem je transformace rovnoměrného rozdělení na požadované rozdělení pomocí **metody inverzní transformace**. Ta vychází z toho, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi náhodnými prvky z rovnoměrného rozdělení z intervalu  $[0,1]$

a neklesající distribuční funkcí. Obecně tedy platí  $x = F^{-1}(r)$ , kde  $x \in [a, b]$  jsou náhodná čísla z distribuční funkce  $F$ ,  $r$  jsou generovaná náhodná čísla z rovnoměrného rozdělení. Je tomu tak proto, že pro distribuční funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$  platí, že  $G(r) = r$  a dále platí rovnost  $F(x) = G(r)$ , po úpravě  $x = F^{-1}[G(r)] = F^{-1}(r)$ . MS Excel nabízí možnost generovat náhodné prvky přímo výběrem jednoho ze základních typů rozdělení pravděpodobnosti, takže u těchto rozdělení již uživatel nemusí provádět inverzní transformaci.

Mnoho operačních systémů poskytuje jednoduchý, ale nepřesný generátor náhodných čísel. Všechny algoritmy cyklují po několika iteracích a opakují stejné sekvence pseudonáhodných čísel. Dobré algoritmy opakují cykly po miliardách tahů, ty horší mohou cyklovat už po několika tisících.

Příliš krátký cyklus může způsobit, že výsledný rozsah možných hodnot portfolia může být nekompletní a to může vést k nepřesnému stanovení VaR. To je důvod, proč je důležité ověřit kvalitu algoritmu, na němž závisí celkový výsledek.

### ***Rychlost a přesnost***

Základní nevýhodou metody Monte Carlo je její početní náročnost. Předpokládejme např. portfolio vystavené pouze jednomu rizikovému faktoru. Potřebujeme-li 10 000 replikací tohoto rizikového faktoru pro dostatečnou přesnost a obsahuje-li portfolio 1000 aktiv, budeme potřebovat 10 000 000 přecenění.

Více replikací vede k přesnějšímu odhadu, ale trvá déle. Při znázornění výsledků v histogramu se tento histogram stává hladší s rostoucím počtem simulací. Výhoda metody Monte Carlo je ta, že uživatel může ohodnotit zvýšení přesnosti přímo jako zvýšení počtu replikací.

### ***Metoda protikladných proměnných***

Bylo vyvinuto několik metod k urychlení výpočtů. Jednou z prvních a nejjednodušších je **metoda protikladných proměnných** (antithetic variable method, AVM), která je založena na negativní korelaci náhodných prvků a na změně jejich znamének. Velkou výhodou metody je její jednoduchost a srozumitelnost. Oproti stojí skutečnost, že aplikovatelnost je omezena zejména na symetrická rozdělení pravděpodobnosti.

Uvažujme vektor  $M$  s náhodnými prvky  $\tilde{\varepsilon}$  z normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ . Vytvoříme dále vektor  $\overline{M}$  tak, že pro každé

$$\tilde{\varepsilon}_m \in M \text{ platí, že } -\tilde{\varepsilon}_m \in \overline{M}.$$

Vzhledem k vlastnostem normovaného normálního rozdělení (zejména je symetrické kolem nuly) pak platí, že jestliže  $\tilde{\varepsilon}_m \in N[0,1]$ , pak i  $-\tilde{\varepsilon}_m \in N[0,1]$ . Násobením původního vektoru koeficientem -1 lze dále považovat korelaci obou vektorů za dokonale negativní, to znamená  $\rho(M, \tilde{M}) = -1$ .

Sjednocením obou vektorů lze získat vektor dvojnásobného počtu náhodných prvků, které budou lépe splňovat charakteristiky normovaného normálního rozdělení. Také sníží se časová náročnost na generování náhodných prvků, protože násobení konstantou je zpravidla rychlejší než generování dodatečného náhodného prvku. Protože normované normální rozdělení je symetrické vzhledem k nule, bude dosaženo nulové střední hodnoty, čehož lze dosáhnout i při nízkém počtu generovaných prvků, protože  $\frac{\tilde{\varepsilon}_m - \tilde{\varepsilon}_m}{2} = 0$ .

## 2.4.2. Generování závislých proměnných

V praxi je portfolio ovlivněno více než jedním zdrojem rizika. Simulační metodologie může být jednoduše rozšířena i na obecnější případ více proměnných, obsahujících  $n$  zdrojů rizika. Jsou-li proměnné nekorelovány, postačí generovat  $n$ -rozměrný vektor náhodných prvků.

Generování libovolně korelovaných proměnných je poněkud složitější a je při něm využíván postup zvaný Choleského dekompozice (faktorizace). Předpokládejme, že chceme generovat  $n$  proměnných z normálního rozdělení s jednotkovým rozptylem a korelovaných podle matice  $C$ . Základním krokem je generování  $n$  nezávislých proměnných  $\eta$  a ty jsou pak transformovány na proměnné  $\varepsilon$  tak, aby bylo dosaženo požadované korelace. Pro případ dvou proměnných konstruujeme

$$\varepsilon_1 = \eta_1, \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_2 = \sigma \eta_1 + \sqrt{1 - \sigma^2} \eta_2, \quad (2.46)$$

kde  $\sigma$  je korelační koeficient mezi prvky  $\varepsilon$ . Je zřejmé, že  $\varepsilon_1$  má jednotkový rozptyl a jsou-li  $\eta_1$  a  $\eta_2$  nezávislé, pak rozptyl  $\varepsilon_2$  je

$$\text{var}(\varepsilon_2) = \sigma^2 \text{var}(\eta_1) + (\sqrt{1 - \sigma^2})^2 \text{var}(\eta_2) = \sigma^2 + (1 - \sigma^2) = 1. \quad (2.47)$$

Využitím faktu, že  $\eta_1$  a  $\eta_2$  jsou nezávislé, můžeme vidět, že kovariance mezi prvky  $\varepsilon$  je

$$\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{cov}[\eta_1, \sigma \eta_1 + \sqrt{1 - \sigma^2} \eta_2] = \sigma \text{cov}(\eta_1, \eta_1) = \sigma. \quad (2.48)$$

To dokazuje, že náhodné proměnné  $\varepsilon$  mají korelaci  $\rho$ .

### ***Choleskeho dekompozice***

Obecně je Choleskeho dekompozice metoda rozložení čtvercové matice  $C$  na součin dolní a horní trojúhelníkové matice, přičemž jedna trojúhelníková matice je transpozicí druhé. To lze zapsat jako  $C = AA^T$ . Předpokladem použití této metody je, aby rozkládaná matice  $C$  byla pozitivně definitní.

K simulování proměnných z vícerozměrného normálního rozdělení s kovarianční maticí  $C$  budeme postupovat podle následujících kroků:

- 1) Rozložíme kovarianční matici  $C = AA^T$ , kde  $A$  je dolní trojúhelníková matice s nulami nad hlavní diagonálou.
- 2) Vygenerujeme vektor nekorelovaných náhodných proměnných z normálního rozdělení označených  $\eta$ .
- 3) Vypočítáme vektor  $\varepsilon = A\eta$ . Náhodný vektor  $\varepsilon$  má vícerozměrné normální rozdělení s kovarianční maticí  $C$ .

Jednotlivé prvky na hlavní diagonále Choleskeho matice  $A$  obecně vypočítáme jako

$$A_{ii} = \sqrt{C_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2} \quad (2.49)$$

a prvky pod hlavní diagonálou takto,

$$A_{ij} = \left( C_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} A_{jk} \right) / A_{jj}. \quad (2.50)$$

### **2.4.3. Výpočet VaR**

Jakmile byl nasimulován vývoj cen aktiv, můžeme stanovit hodnotu portfolia pro jednotlivé scénáře a z nich pak určíme rozdělení pravděpodobnosti změny hodnoty portfolia na konci daného časového horizontu.

Hodnota VaR je následně vypočítaná jako  $(100 - x)$ -tý percentil distribuční funkce rozdělení pravděpodobnosti změny hodnoty portfolia, kde  $x$  označuje hladinu spolehlivosti.

## **2.5. Expected Shortfall**

Jednou ze slabin přístupů měření rizik založených na Value at Risk je skutečnost, že nic neříkají o rozsahu možných ztrát za příslušným pravděpodobnostním kvantilem. Například údaj, že VaR portfolia činí 10 milionů korun v případě jednodenního časového

intervalu na hladině spolehlivosti 99 % uživatelé nic neříká o tom, jakou ztrátu může očekávat za touto úrovní, tedy v jednom případě ze sta. V této souvislosti se používá pojem očekávaná extrémní ztráta (expected shortfall, někdy také označována jako Conditional Value at Risk nebo CVaR). Jedná se o veličinu, která vyjadřuje střední hodnotu ztráty v případě, že ztráta bude vyšší než hodnota Value at Risk. Matematicky je expected shortfall vyjádřena jako

$$ES_{\alpha}(X) = E[-X | -X \geq VaR_{\alpha}(X)], \quad (2.51)$$

kde  $ES_{\alpha}$  představuje očekávanou extrémní ztrátu,  $X$  je náhodná veličina vyjadřující zisk, respektive ztrátu a  $VaR_{\alpha}$  představuje hodnotu VaR na hladině významnosti  $\alpha$ .

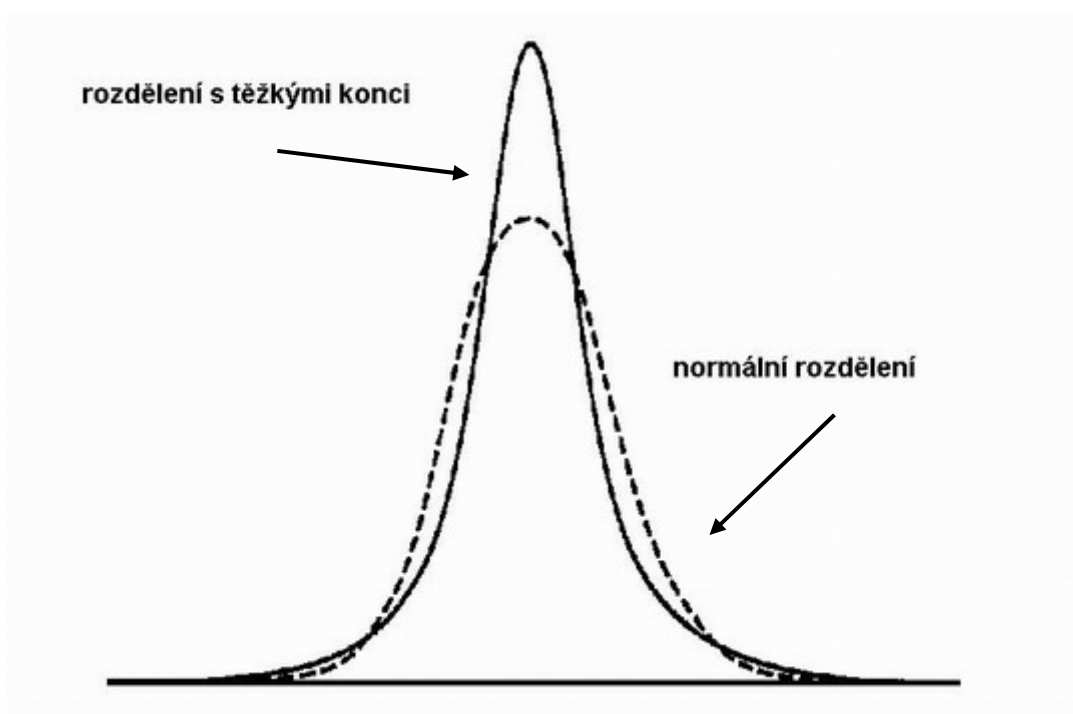
Z definice očekávané extrémní ztráty vyplývá, že jde o veličinu, jejíž hodnota je vždy větší než VaR. Výpočet  $ES$  je velice jednoduchý, jestliže instrumenty ve sledovaném portfoliu mají normální rozdělení výnosů. V praxi se bohužel rozdělení pravděpodobnosti výnosů finančních instrumentů podstatně liší od normálního rozdělení, proto zmíněný výpočet není příliš přesný. Místo toho je vhodné použít pokročilejší techniky, například simulaci Monte Carlo. Princip spočívá v nasimulování dostatečného počtu scénářů vývoje portfolia a výpočtu střední hodnoty z těch údajů, které přesahují VaR.

## 2.6. Nenormální rozdělení pravděpodobnosti výnosů

Value at Risk je jedním z nejpoužívanějších nástrojů řízení tržních rizik, nicméně má některé nedostatky, které snižují jeho vypovídací schopnost. Jedním z nedostatků je, že výpočet VaR je často založen na předpokladu normálního rozdělení pravděpodobnosti výnosů finančních aktiv.

Ve skutečnosti má však toto rozdělení pravděpodobnosti není normální, ale má tendenci k tzv. těžkým koncům (**heavy tails, fat tails**). Takové rozdělení pravděpodobnosti se pak také někdy nazývá jako leptokurtické. Obr. 2.3 porovnává typické leptokurtické rozdělení pravděpodobnosti s normálním rozdělením, které má stejnou střední hodnotu a stejnou směrodatnou odchylku. Rozdělení s těžkými konci je špičatější než normální rozdělení a jeho konce padají k horizontální ose pomaleji.

Obr. 2.3: Porovnání normálního a leptokurtického rozdělení



Zdroj: Hull (2007)

Z grafu je také patrné, že rozdělení s těžkými konci přiřazuje v porovnání s normálním rozdělením větší pravděpodobnost výskytu hodně velkým a hodně malým výnosům (resp. ztrátám) a také výnosům blízkým ke střední hodnotě. Ostatní výnosy jsou naopak méně pravděpodobné než předpokládá normální rozdělení.

V porovnání s leptokurtickým rozdělením předpokládá normální rozdělení, že události vzdálené od střední hodnoty více než pět směrodatných odchylek jsou extrémně ojedinělé a události s deseti a více směrodatnými odchylkami jsou prakticky nemožné.

V Tab. 2.1 je ilustrován fenomén těžkých konců zkoumáním denních změn 12 různých měn během časové periody deseti let. Prvním krokem k sestavení této tabulky byl výpočet směrodatné odchylky denní procentní změny v každé měně. Další část je zaznamenat, jak často aktuální procentní změna přesáhla jednu směrodatnou odchylku, dvě směrodatné odchylky atd. Tato čísla jsou pak porovnána s odpovídajícími hodnotami normálního rozdělení.

Denní procentní změna přesáhla tři směrodatné odchylky v 1,34 % dnů. Model normálního rozdělení předpokládá, že by se to stalo pouze v 0,27 % sledovaných dnů. Denní procentní změny přesahující čtyři, pět a šest směrodatných odchylek s podílem 0,29 %, 0,05 % a 0,01 % jsou prakticky nemožné.

0,08 % a 0,03 % sledovaných dnů. Podle modelu normálního rozdělení by tyto situace byly velice nepravděpodobné.

*Tab. 2.1: Podíl dnů, kdy výnosy přesáhly uvedený počet směrodatných odchylek*

	Skutečný svět (%)	Normální rozdělení (%)
> 1 směrodatná odchylka	25,04	31,37
> 2 směrodatné odchylky	5,27	4,55
> 3 směrodatné odchylky	1,34	0,27
> 4 směrodatné odchylky	0,29	0,01
> 5 směrodatných odchylek	0,08	0,00
> 6 směrodatných odchylek	0,03	0,00

*Zdroj: Hull (2007)*

### 2.6.1. Test dobré shody

K ověření hypotézy, zda má náhodná veličina určité předpokládané rozdělení pravděpodobnosti, slouží test dobré shody. V něm je testována nulová hypotéza  $H_0$ , že náhodná veličina má předpokládané rozdělení, oproti alternativní hypotéze  $H_1$ , že náhodná veličina toto rozdělení nemá.

Postup při testu dobré shody je následující.

- 1) Obor všech možných hodnot náhodné veličiny  $X$  rozdělíme do  $k$  disjunktních tříd.
- 2) Pro každou třídu stanovíme pravděpodobnost  $p_i$ , že náhodná proměnná  $X$  nabude hodnoty z  $i$ -té třídy. Tuto pravděpodobnost vypočítáme dle očekávaného rozdělení.
- 3) Stanovíme očekávané četnosti náhodné veličiny z předpokládaného rozdělení v jednotlivých třídách.
- 4) Vypočteme testovací kritérium jako

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_{oi})^2}{f_{oi}}. \quad (2.52)$$

Nakonec ověříme, jestli spadá vypočtené testovací kritérium do oboru kritických hodnot, který je dán intervalem

$$W = (\chi_p^2(k-s-1); \infty), \quad (2.53)$$

kde  $k$  je počet tříd,  $s$  je počet parametrů očekávaného rozdělení a  $p$  je hladina významnosti.

Pokud hodnota  $\chi^2$  do oboru kritických hodnot patří, zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme alternativní hypotézu, náhodná veličina pak nemá předpokládaný typ rozdělení. Pokud testovací kritérium do oboru kritických hodnot nepatří, postupujeme opačně, čili přijímáme nulovou a zamítáme alternativní hypotézu, a tedy náhodná veličina má předpokládaný typ rozdělení.

Existence těžkých konců u rozdělení skutečných výnosů způsobuje, že použitím modelu normálního rozdělení jsou podceněna skutečná podstupovaná tržní rizika. Riziko extrémní ztráty je ve skutečnosti mnohem vyšší, než je předpokládáno modely založenými na předpokladu normálního rozdělení.

Existuje několik metod, jak tento jev zohlednit. Patří mezi ně

- směsice dvou normálních rozdělení,
- Generalized Error Distribution (GED),
- Studentovo rozdělení,
- teorie extrémních hodnot.

## 2.6.2. Směsice dvou normálních rozdělení

V RiskMetrics – Technical Document (1996) je popsána metoda směsice dvou normálních rozdělení pravděpodobnosti, která byla vyvinuta jako efektivnější měřítko pro postihnout rozdělení s těžkými konci. Výnosy jsou zde generovány ze směsice dvou různých normálních rozdělení. Předpokládá, že každý denní výnos pochází z jednoho z těchto normálních rozdělení.

Předpokladem tohoto modelu, že výnosy můžeme popsat podle vztahu

$$r_t = \sigma_{1,t} \cdot \varepsilon_{1,t} + \sigma_{1,t} \cdot \delta_t \cdot \varepsilon_{2,t}, \quad (2.54)$$

kde  $r_t$  je logaritmický výnos,

$\varepsilon_{1,t}$  je náhodná proměnná z normálního rozdělení  $N(0,1)$ ,

$\varepsilon_{2,t}$  je náhodná proměnná z normálního rozdělení  $N(\mu_{2,t}, \sigma_{2,t}^2)$ ,

$\delta_t$  je binární proměnná, která s pravděpodobností  $p$  nabývá hodnoty 1 a s pravděpodobností  $1 - p$  nabývá hodnoty 0,

$\sigma_{1,t}$  je směrodatná odchylka.



Jinak řečeno, směsice normálních rozdělání předpokládá, že denní výnosy  $\tilde{r}_t$  normované odhadem volatility jsou generovány podle modelu

$$\tilde{r}_t = \varepsilon_{1,t} + \delta_t \cdot \varepsilon_{2,t}. \quad (2.55)$$

Podle minulé rovnice můžeme model prezentovat tak, že každý denní normovaný výnos je generován podle jednoho ze dvou druhů rozdělání pravděpodobnosti.

- Je-li  $\delta_{1,t} = 0$ , pak je normovaný výnos generován z normovaného normálního rozdělání  $N(0,1)$ ,
- Je-li  $\delta_{1,t} = 1$ , pak je výnos generován z normálního rozdělání se střední hodnotou  $\mu_{2,t}$  a rozptylem  $1 + \sigma_{2,t}^2$ .

Proměnnou  $\delta_{1,t}$  můžeme brát jako hodnotu, která určuje, zda nastane situace, že výnos nebude z normálního rozdělání. Parametr  $p$  je pravděpodobnost, že takový výnos nastane. Je důležité mít na vědomí, že ačkoliv je tento model složen ze dvou normálních rozdělání, samo smíšené rozdělání už normální není.

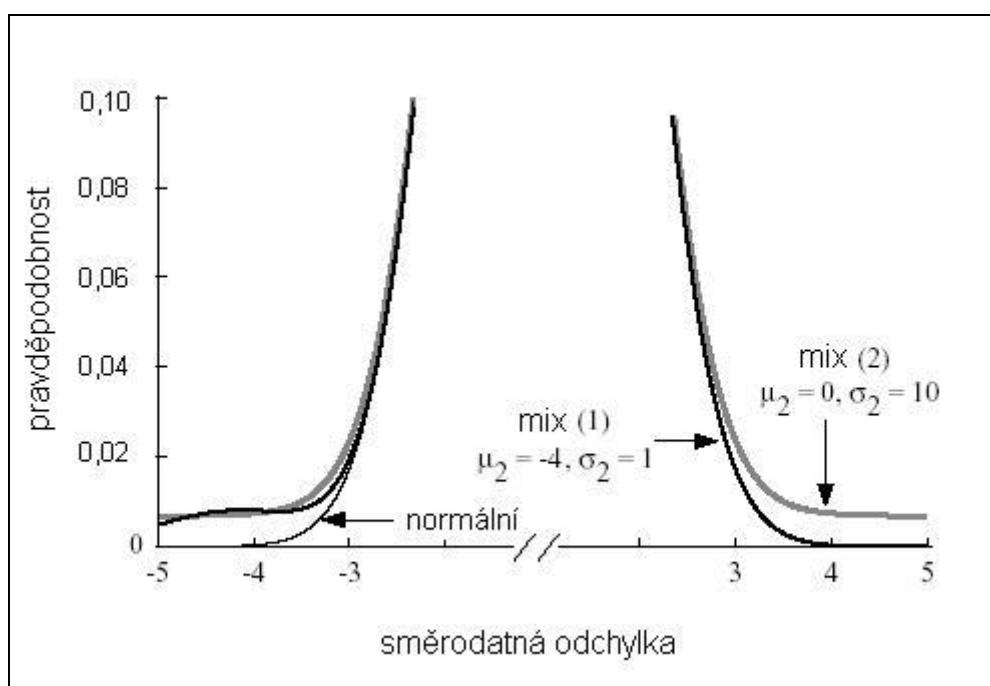
Tab. 2.2 ukazuje parametry dvou normálních rozdělání, jejichž smíšený model je zobrazen na Obr. 2.4

*Tab. 2.2: Parametry smíšených modelů*

	$\mu_{1,t}$	$\sigma_{1,t}$	$p$	$\mu_{2,t}$	$\sigma_{2,t}$
Mix 1	0	1	2 %	-4	1
Mix 2	0	1	2 %	0	10

Na Obr. 2.4 je ukázáno, že když má jedno z normálních rozdělání velkou negativní střední hodnotu, jako v mixu 1, znamená to větší pravděpodobnost výskytu velkého negativního výnosu vzhledem k normovanému normálnímu rozdělání. Stejně jako v případě mixu 2 můžeme konstruovat rozdělání pravděpodobnosti s tlustšími konci než u normovaného normálního rozdělání pomocí normálního rozdělání s velkou směrodatnou odchylkou.

Obr. 2.4: porovnání normálního rozdělení a smíšených modelů



zdroj: RiskMetrics – Technical Document (1996)

### 2.6.3. GED rozdělení

Druhou možností, která je popsána v RiskMetrics - Technical Document (1996), je GED (generalized error distribution). GED rozdělení je velmi flexibilní rozdělení v tom, že může nabývat různých tvarů včetně normálního rozdělení. Podle tohoto modelu jsou výnosy generovány jako

$$r_t = \sigma_t \xi_t, \quad (2.56)$$

kde  $r_t$  je logaritmický výnos,  $\xi_t$  je náhodná proměnná pocházející z GED rozdělení s parametrem  $\nu$ . Tento parametr reguluje tvar rozdělení. Rozptyl výnosů podle GED rozdělení je pak vyjádřen vztahem

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2. \quad (2.57)$$

Funkce hustoty GED rozdělení je

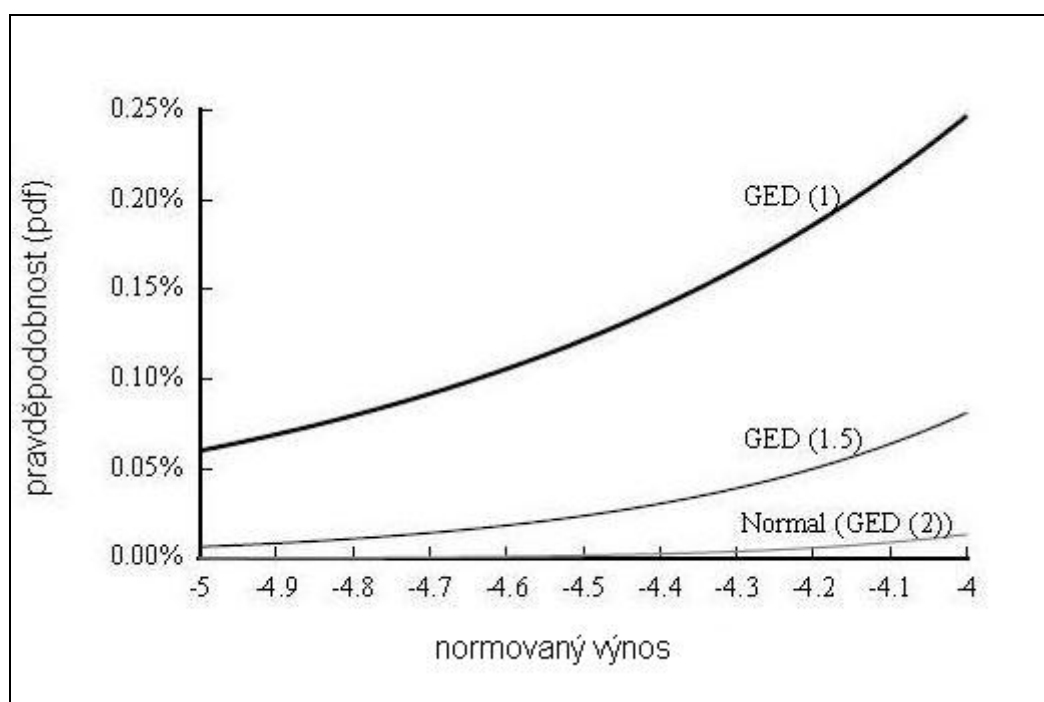
$$f(\xi_t) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{\xi_t}{\lambda}\right|^\nu\right)}{\lambda 2^{\frac{\nu+1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}, \quad (2.58)$$

kde  $\Gamma$  je gama funkce a

$$\lambda = \sqrt{\frac{2^{\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}}. \quad (2.59)$$

Když je  $\nu = 2$ , pak je vytvořena funkce hustoty normálního rozdělení, je-li  $\nu > 2$ , jsou konce tenčí než u normálního rozdělení, je-li naopak  $\nu < 2$ , jsou konce tlustší. Na Obr. 2.5 jsou zobrazeny levé konce rozdělení pro tři různé hodnoty parametru  $\nu$ .

Obr. 2.5: Levý konec GED rozdělení



Zdroj: RiskMetrics – Technical Document (1996)

Všimněme si, že pokud je parametr  $\nu$  menší než 2 (normální rozdělení), výsledkem je rozdělení s relativně velkou pravděpodobností ztrát daleko od střední hodnoty.

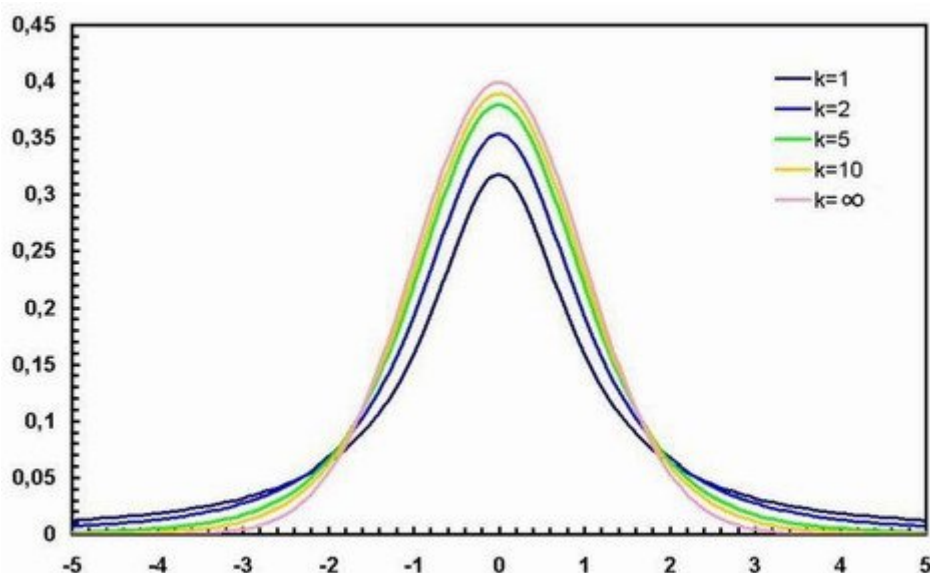
#### 2.6.4. Studentovo rozdělení

Studentovo rozdělení (t-rozdělení) s  $n$  stupni volnosti má náhodná proměnná  $T = \frac{X_1}{X_2} \sqrt{n}$ , kde  $X_1$  a  $X_2$  jsou nezávislé náhodné proměnné a proměnná  $X_1$  se řídí rozdělením  $N(0,1)$  a proměnná  $X_2$  se řídí rozdělením  $\chi^2(n)$ . Funkce hustoty Studentova rozdělení je

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (2.60)$$

Graf funkce hustoty je závislý na počtu stupňů volnosti  $n$ , což je jediný parametr Studentova rozdělení. Pro  $n \rightarrow \infty$  se tvar frekvenční funkce Studentova rozdělení blíží tvaru normálního rozdělení  $N(0,1)$ . Základní rozdíl mezi t-rozdělením a normálním rozdělením je v jejich koncích. Studentovo rozdělení má těžší konce a platí pro něj, že čím více má stupňů volnosti, tím více se blíží k normálnímu rozdělení. Naopak čím méně stupňů volnosti má, tím má těžší konce. Závislost tvaru funkce hustoty Studentova rozdělení na počtu stupňů volnosti je zobrazena na Obr. 2.6.

Obr. 2.6: Studentovo rozdělení pro různé počty stupňů volnosti



Zdroj: wikipedia.org

### 2.6.5. Teorie extrémních hodnot

Teorie extrémních hodnot (Extreme value theory, EVT) umožňuje vypočítat VaR na vysokých hladinách spolehlivosti a to bez omezujících předpokladů o typu rozdělení pravděpodobnosti přírůstků tržních sazeb.

Metody založené na EVT vycházejí z poznatku, že pokud jsou splněny poměrně obecné podmínky, rozdělení extrémních jevů konvergují k určitým limitním rozdělením lišícím se pouze parametry a to bez ohledu na to, z jakého rozdělení pocházejí zkoumané jevy.

Odhadneme-li parametry příslušného limitního rozdělení, můžeme pomocí EVT počítat VaR spolehlivěji a na vyšších hladinách pravděpodobnosti než u historických simulací.

Metody, které se snaží odhadnout celé rozdělení přírůstků tržních sazeb, zpravidla kladou důraz na relativně malé změny, kterých je největší množství, a konce rozdělení tak zůstávají poněkud v pozadí. EVT je naproti tomu zaměřena výhradně na konce rozdělení, je tedy vhodná pro zkoumání pravděpodobností extrémních jevů.

Teorie extrémních hodnot je moderní odvětví statistiky, které se zabývá výskytem extrémních odchylek od střední hodnoty rozložení pravděpodobností. EVT je dnes ve velké míře využívána pro posuzování rizik vyplývajících z výskytu vysoce nepravděpodobných událostí, jako jsou např. stoleté povodně. Někdy je EVT uváděna také jako metoda stress testingu.

Předpokládejme, že  $F(x)$  je kumulativní distribuční funkce pro proměnnou  $x$  a že  $u$  je hodnota proměnné  $x$  v pravém konci rozdělení. Pravděpodobnost, že  $x$  leží mezi  $u$  a  $u + y$  (kde  $y > 0$ ) je  $F(u + y) - F(u)$ . Pravděpodobnost, že  $x$  je větší než  $u$  je  $1 - F(u)$ . Definujme tedy  $F_u(y)$  jako pravděpodobnost, že  $x$  leží mezi  $u$  a  $u + y$  za podmínky, že  $x > u$ . To je

$$F_u(y) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (2.61)$$

Jedná se v podstatě o výpočet podmíněné pravděpodobnosti výskytu jevu  $A$  za podmínky, že se uskutečnil jev  $B$  a platí, že

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \quad (2.62)$$

Proměnná  $F_u(y)$  definuje pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. Je to distribuční funkce rozdělení pro částku, o kterou  $x$  přesáhne  $u$ , za předpokladu, že  $x$  hodnotu  $u$  překročí.

Výsledkem je, že pro široký okruh rozdělení  $F(x)$  konverguje rozdělení  $F_u(y)$  s rostoucí hodnotou  $u$  k zobecněnému Paretovu rozdělení. Zobecněné Paretovo rozdělení je charakterizováno distribuční funkcí

$$G_{\xi, \beta}(y) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad (2.63)$$

$$\text{kde } y = x - u. \quad (2.64)$$

Rozdělení má dva parametry, které jsou odhadnuty ze vstupních dat. Parametr  $\beta$  je parametr míry a musí být vždy větší než 0. Parametr  $\xi$  určuje tvar rozdělení a rychlost, se kterou se rozdělení blíží k nule, určuje tedy sílu těžkých konců. Má-li podkladové aktivum normální rozdělení, je  $\xi = 0$  a zobecněné Paretovo rozdělení pak nabývá podoby

$$G_{\xi,\beta}(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right). \quad (2.65)$$

Jak se konce rozdělení stávají těžší, hodnota  $\xi$  roste. Pro většinu finančních dat platí, že  $\xi$  se pohybuje v rozmezí 0,1 až 0,4.

### ***Odhad parametrů $\xi$ a $\beta$***

Tyto parametry mohou být určeny metodou maximální věrohodnosti. Funkce hustoty zobecněného Paretova rozdělení  $g_{\xi,\beta}(y)$  byla odvozena z distribuční funkce z rovnice (2.63) derivováním podle  $y$  a má tvar

$$g_{\xi,\beta} = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}. \quad (2.66)$$

Nejprve zvolíme hodnotu  $u$ . To může být hodnota blízko 95. percentilu empirického rozdělení. Pak seřadíme pozorování  $x$  od nejvyššího po nejnižší a zaměříme naši pozornost na ta pozorování, kde  $x > u$ . Předpokládejme, že takových pozorování je  $n_u$  a jsou označeny  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n_u$ ). Funkce věrohodnosti (předpokládejme, že  $\xi \neq 0$ ) je

$$L = \prod_{i=1}^{n_u} \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}. \quad (2.67)$$

Maximalizovat tuto funkci je stejné jako maximalizovat její logaritmus, tedy

$$L = \sum_{i=1}^{n_u} \ln \left[ \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta}\right)^{-1/\xi-1} \right]. \quad (2.68)$$

Optimální hodnoty parametrů  $\xi$  a  $\beta$  jsou získány tak, že za použití standardních numerických procedur je maximalizována předchozí funkce věrohodnosti.

### ***Odhad konce rozdělení***

Pravděpodobnost, že  $x > y + u$  podmíněná tím, že  $x > u$  je  $1 - G_{\xi, \beta}(y)$ .

Pravděpodobnost že  $x > u$  je  $1 - F(u)$ . Nepodmíněná pravděpodobnost že  $x > u + y$  je proto

$$[1 - F(u)] \cdot [1 - G_{\xi, \beta}(y)].$$

Jestliže  $n$  je celkový počet pozorování, odhad  $1 - F(u)$  vypočítaný z historických dat je

$n_u / n$ . Nepodmíněná pravděpodobnost že  $x > u + y$  je tedy

$$\frac{n_u}{n} [1 - G_{\xi, \beta}(y)] = \frac{n_u}{n} \left( 1 + \xi \frac{y}{\beta} \right)^{-1/\xi}. \quad (2.69)$$

To znamená, že odhad distribuční funkce konce rozdělení pravděpodobnosti proměnné  $x$ , když  $x$  je velké, je

$$F(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left( 1 + \xi \frac{x - u}{\beta} \right)^{-1/\xi}. \quad (2.70)$$

### ***Levý konec rozdělení***

Až dosud jsme předpokládali, že se zajímáme o pravý konec rozdělení pravděpodobnosti. Zajímá-li nás levý konec, můžeme použít stejnou metodologii, jen místo proměnné  $x$  budeme počítat s proměnnou  $-x$ .

### ***Výpočet VaR***

K výpočtu VaR na hladině spolehlivosti  $q$  je nutné vyřešit rovnici

$$F(VaR) = q. \quad (2.71)$$

Z rovnice (2.70) dostaneme

$$q = 1 - \frac{n_u}{n} \left( 1 + \xi \frac{VaR - u}{\beta} \right)^{-1/\xi}, \quad (2.72)$$

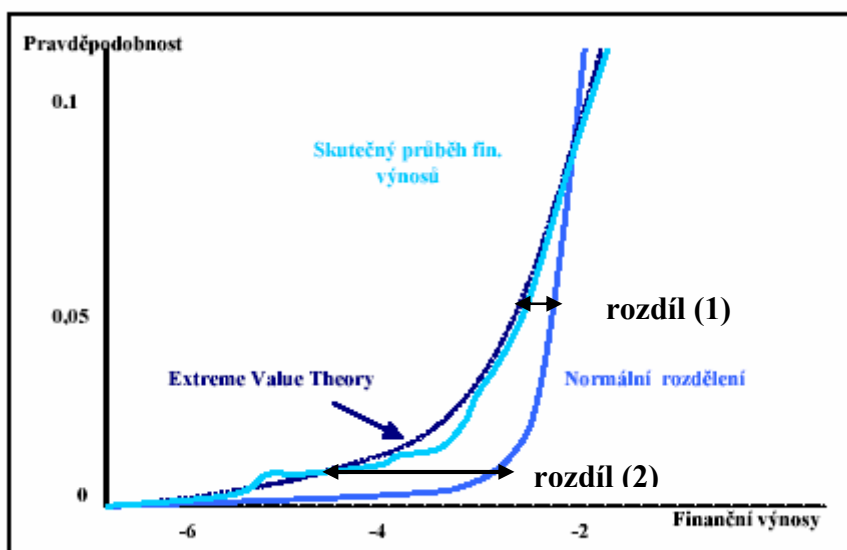
takže

$$VaR = u + \frac{\beta}{\xi} \left[ \left( \frac{n}{n_u} (1 - q) \right)^{-\xi} - 1 \right]. \quad (2.73)$$

Tato rovnice poskytuje odhad VaR založený nejen na historických údajích, ale také na znalosti těžkých konců parametrického rozdělení.

Na Obr. 2.7 je znázorněno srovnání průběhu distribuční funkce normálního rozdělení, rozdělení podle EVT a skutečný průběh rozdělení finančních výnosů. Z grafu je zřejmé, že distribuční funkce normálního rozdělení klesá mnohem rychleji než distribuční funkce skutečných výnosů a přiděluje nízkou pravděpodobnost extrémním hodnotám. Výsledky EVT poskytují hladký průběh funkce, který je mnohem věrohodnější a mnohem více odpovídá realitě než průběh distribuční funkce normálního rozdělení.

*Obr. 2.7: Průběh distribučních funkcí rozdělení finančních výnosů*



*Zdroj: Heinrich (2005), vlastní úprava*

Z obrázku je také vidět, že se snižující se pravděpodobností se zvyšují rozdíly mezi skutečnými výnosy (resp. výnosy podle EVT) a mezi výnosy podle normálního rozdělení. Tento rozdíl je v obrázku označen šipkou **rozdíl (1)** pro pravděpodobnost 5 % a šipkou **rozdíl (2)** pro pravděpodobnost 1 %. Je vidět, že pro pravděpodobnost 1 % je tento rozdíl mnohem větší než pro pravděpodobnost 5 %. Proto by měl být také rozdíl mezi VaR podle EVT a VaR za předpokladu normálního rozdělení na hladině spolehlivosti 99 % větší než rozdíl mezi nimi na hladině spolehlivosti 95 %.



### **3. Stanovení hodnoty Value at Risk portfolia finančních aktiv**

V této kapitole bude vypočtena hodnota Value at Risk portfolia akciových instrumentů s časovým horizontem jednoho dne a na různých hladinách pravděpodobnosti. Nejprve bude VaR vypočten pomocí simulace Monte Carlo za předpokladu normálního rozdělení pravděpodobnosti výnosů finančních aktiv a poté pomocí teorie extrémních hodnot, která neklade žádné požadavky na typ rozdělení pravděpodobnosti. Nakonec budou výsledky získané oběma způsoby porovnány.

#### **3.1. Sestavení portfolia a zjištění vstupních dat**

Value at Risk bude počítána pro akciové portfolio složené z deseti titulů, z nichž šest je obchodovaných na pražské Burze cenných papírů a denominovaných v českých korunách (ČEZ, Erste Bank, Komerční banka Telefónica O2 C.R., Unipetrol a Zentiva) a dále ze čtyř zahraničních titulů. Jsou to akcie Allianz, Heineken a Siemens denominované v eurech a akcie BP denominované v britských librách.

Ceny akcií byly zjišťovány za období od 8. července 2004 do 18. prosince 2007 a za toto období je k dispozici 891 denních závěrečných kurzů pro každou akcii. Ceny akcií pocházejí z databází investičního portálu [www.patria.cz](http://www.patria.cz). Měnové kurzy pro přepočet cen zahraničních akcií byly zjišťovány za stejné období a jsou to kurzy vyhlášené Českou národní bankou pro jednotlivé dny a pocházejí z webových stránek ČNB. Vývoj cen akcií a měnových kurzů za sledované období je zobrazen v grafech v Příloze č. 1.

Pokud se nějaký den na domácím či zahraničním trhu neobchodovalo a cena nebo kurz tudíž nejsou k dispozici, byly chybějící údaje nahrazeny cenou nebo kurzem z předchozího dne, kdy se obchodovalo. Například 17. listopadu není v České republice z důvodu státního svátku obchodní den, ale na zahraničních trzích ano. Proto byly jako ceny aktiv, se kterými se ten den neobchodovalo, použity jejich ceny z předchozího dne, tedy ze 16.11.

V následující Tab. 3.1 je zobrazeno přesné složení portfolia k 18.12.2007. Pro tento den byl kurz eura byl 26,35 CZK/EUR a kurz britské libry 36,857 CZK/GBP. Pomocí těchto kurzů byly přepočítány ceny zahraničních akcií na české koruny.

Tab. 3.1: Složení portfolia

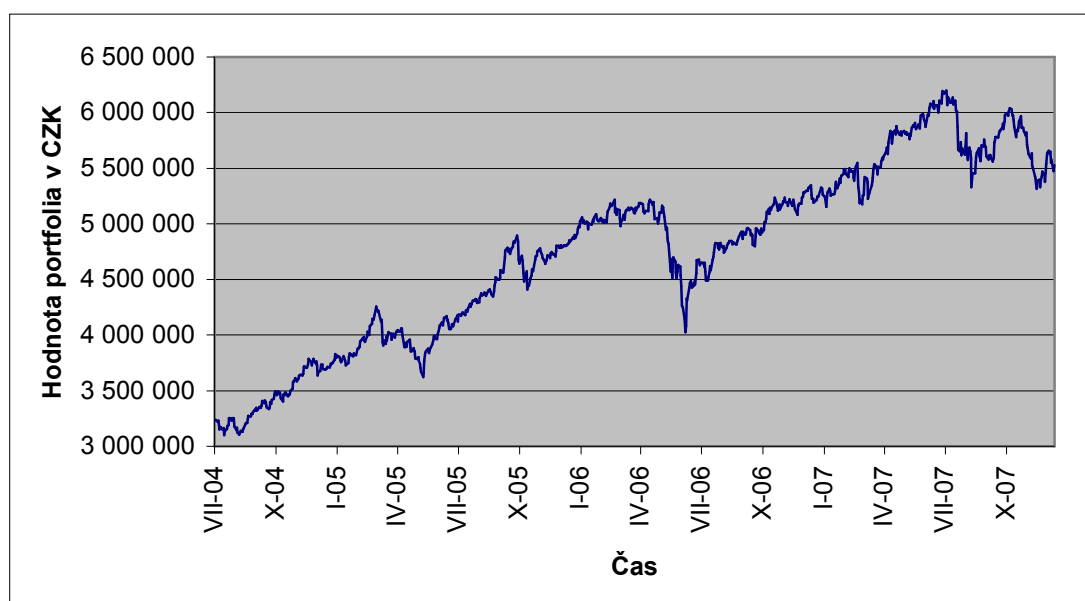
Název akcie	Cena akcie (kótovaná)	Cena akcie (CZK)	Kusy akcií	Hodnota akcií celkem
ČEZ	1397 CZK	1397	800	1 117 600
Erste Bank	1245 CZK	1245	600	747 000
Komerční banka	4130 CZK	4130	200	826 000
Telefónica O2 C.R.	552,8 CZK	552,8	400	221 120
Unipetrol	323,3 CZK	323,3	1000	323 300
Zentiva	939,5 CZK	939,5	500	469 750
Allianz	142,82 EUR	3763,307	200	752 661
BP	606,5 GBP	22353,77	25	558 844
Heineken	44,66 EUR	1176,791	200	235 358
Siemens	103,57 EUR	2729,07	100	272 907

**Hodnota portfolia celkem**

**5 524 541 Kč**

Na Obr. 3.1 je znázorněn vývoj hodnoty portfolia za celé sledované období.

Obr. 3.1: Vývoj hodnoty portfolia



Toto akciové portfolio je složeno z deseti titulů, je proto je vystaveno deseti rizikovým faktorům v podobě deseti tržních cen jednotlivých akcií. Zahraniční akcie jsou kromě akciového rizika navíc vystaveny i riziku měnovému, které je reprezentováno kurzy eura a britské libry. Celkem tedy na dané portfolio působí dvanáct tržních rizikových faktorů, mezi jejichž změnami je určitá statistická závislost.

### 3.1.1. Výpočet výnosů

Po sestavení akciového portfolio a získání časových řad o cenách jednotlivých aktiv byly doplněny chybějící údaje a ceny zahraničních akcií byly přepočítány na české koruny pomocí příslušných měnových kurzů. Následně byla spočítána hodnota tohoto portfolio pro všech 891 dní v minulosti.

Poté byly vypočítány spojitě denní výnosy akcií a měn. Z 891 denních kurzů bylo vypočítáno 890 denních spojitých výnosů podle vzorce

$$r = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}. \quad (3.1)$$

Pro zahraniční akcie byly výnosy počítány v měně, v níž jsou kótovány a tedy ne v CZK. Pro denní výnosy těchto aktiv byl vypočítána jejich střední hodnota  $\bar{r}$ , která později bude použita jako součást trendového koeficientu geometrického Brownova pohybu.

### 3.1.2. Test normality výnosů

Při výpočtu Value at Risk většinou předpokládáme, že výnosy finančních aktiv mají normálního rozdělení. Ve skutečnosti tomu tak ale nebývá a rozdělení skutečných výnosů má těžší konce než normální rozdělení a to způsobuje podcenění skutečných rizik.

Proto je nejprve proveden test normality výnosů. Zda jsou výnosy skutečně normální, zjistíme pomocí testu dobré shody. Tento neparametrický test ověřuje hypotézu o předpokládaném tvaru rozdělení pravděpodobnosti. Testujeme nulovou hypotézu  $H_0$ , že náhodný výběr pochází ze základního souboru s normálním rozdělením oproti alternativní hypotéze  $H_1$ , že základní soubor toto rozdělení nemá. Testování se provádí na hladině významnosti  $p = 5\%$ .

Při testu normality výnosů jsme tyto výnosy nejprve rozdělili do 50 tříd a třídy následně slučovali tak, aby nejvýše v jedné třídě byla očekávaná četnost  $f_{oi} < 5$ . Postup výpočtu testu dobré shody pro výnosy portfolio je zobrazen v Tab. 3.2.

Tab. 3.2: Test dobré shody pro výnosy portfolia

Třída $i$	Horní mez třídy $x_i$	$f_i$	$\Phi(x_i)$	$p_i$	$f_{oi}$	$(f_i - f_{oi})^2$	$\frac{(f_i - f_{oi})^2}{f_{oi}}$
1	-0,0240	13	0,0059	0,0059	5,27	59,7362	11,3328
2	-0,0195	15	0,0196	0,0137	12,18	7,9510	0,6528
3	-0,0173	10	0,0333	0,0137	12,18	4,7385	0,3891
4	-0,0151	8	0,0540	0,0207	18,45	109,1499	5,9168
5	-0,0129	11	0,0838	0,0298	26,54	241,6340	9,1029
6	-0,0107	22	0,1246	0,0408	36,28	203,8784	5,6198
7	-0,0084	30	0,1775	0,0529	47,09	292,1918	6,2045
8	-0,0062	52	0,2428	0,0652	58,06	36,7792	0,6334
9	-0,0040	74	0,3192	0,0764	68,00	36,0207	0,5297
10	-0,0018	84	0,4041	0,0850	75,63	69,9803	0,9252
11	0,0005	102	0,4939	0,0898	79,91	488,1434	6,1090
12	0,0027	96	0,5840	0,0901	80,18	250,2099	3,1205
13	0,0049	98	0,6699	0,0859	76,42	465,6694	6,0935
14	0,0071	80	0,7476	0,0777	69,18	117,0677	1,6922
15	0,0093	66	0,8145	0,0668	59,48	42,4783	0,7141
16	0,0116	44	0,8690	0,0546	48,58	20,9515	0,4313
17	0,0138	31	0,9114	0,0423	37,68	44,6273	1,1844
18	0,0160	19	0,9426	0,0312	27,76	76,7541	2,7648
19	0,0182	17	0,9644	0,0218	19,43	5,8867	0,3030
20	0,0204	5	0,9789	0,0145	12,91	62,5931	4,8478
21	0,0227	4	0,9881	0,0092	8,15	17,2298	2,1139
22	0,0271	7	0,9967	0,0086	7,67	0,4497	0,0586
23	0,0582	2	1,0000	0,0033	2,96	0,9235	0,3119
<b>suma</b>	890		1,00000	890,00			71,0522

Hodnoty ve druhém sloupci tabulky jsou horní meze jednotlivých tříd, to znamená, že první třída je interval  $(-\infty; -0,0240]$ , druhá třída je interval  $(-0,0240; -0,0195]$  atd. Ve třetí sloupec s hodnotami  $f_i$  jsou skutečné četnosti v jednotlivých třídách. Čtvrtý sloupec zobrazuje hodnoty distribuční funkce předpokládaného, tedy normálního, rozdělení pro horní meze příslušných tříd.

Pomocí těchto hodnot jsou následně vypočítány pravděpodobnosti výskytu v jednotlivých třídách  $p_i$  jako  $p_i = \Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})$ . V dalším sloupci jsou očekávané četnosti  $f_{oi} = N \cdot p_i$  podle testovaného typu rozdělení, kde  $N$  je počet pozorování. Hodnoty v dalších sloupcích jsou mezivýpočty pro určení testovacího kritéria. Hodnota testovacího kritéria podle vzorce (2.52) je tedy **71,0522**.

Oborem kritických hodnot je pak podle vzorce (2.53) interval

$$W = (\chi_{0,05}^2(23 - 2 - 1); \infty) = (31,4104; \infty).$$

Hodnota testovacího kritéria spadá do oboru kritických hodnot a to znamená, že **zamítáme** nulovou hypotézu a **přijímáme** alternativní hypotézu. Náhodný výběr proto **nepochází** z normálního rozdělení.

Z Tab. 3.2 také vyplývá, že podle normálního rozdělení by se ztráty větší než 2,4 % měly vyskytnout přibližně pětkrát, ve skutečnosti však byl počet takových ztrát třináct.

V Tab. 3.3 jsou zobrazeny výsledky testu dobré shody pro všechna aktiva v portfoliu a pro portfolio samotné.

Tab. 3.3: Výsledky testu dobré shody

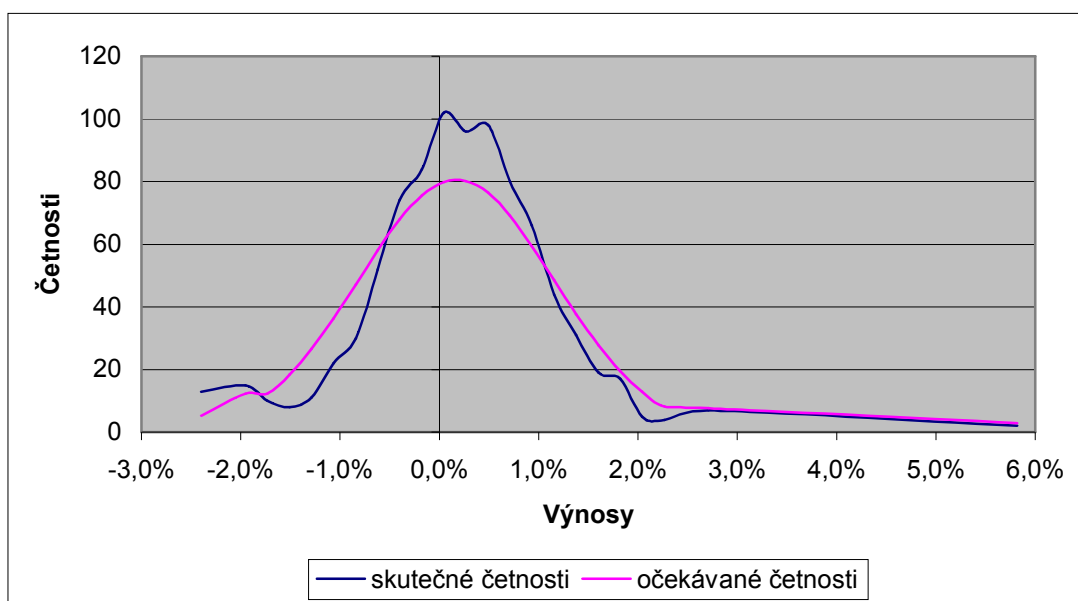
Aktivum	Testovací kritérium	Dolní mez oboru kritických hodnot	Normální rozdělení ANO/NE
ČEZ	61,39	33,92	NE
Erste Bank	78,42	40,11	NE
Komerční banka	92,63	32,67	NE
Telefónica O2 C.R.	189,72	28,87	NE
Unipetrol	413,32	25,00	NE
Zentiva	176,68	27,59	NE
Allianz	45,85	48,60	ANO
BP	40,96	44,99	ANO
Heineken	67,37	31,41	NE
Siemens	61,40	33,92	NE
GBP	41,01	46,19	ANO
EUR	84,05	33,92	NE
portfolio	71,05	31,41	NE

Testem dobré shody bylo prokázáno, že podle normálního rozdělení jsou rozděleny pouze výnosy akcií Allianz a BP a výnosy britské libry. Výnosy ostatních aktiv normální nejsou.

Na následujícím Obr. 3.2 je zobrazeno srovnání skutečných četností a očekávaných četností za předpokladu normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a stejnou směrodatnou odchylkou jako mají skutečné výnosy portfolia. Data pocházejí z Tab. 3.2.

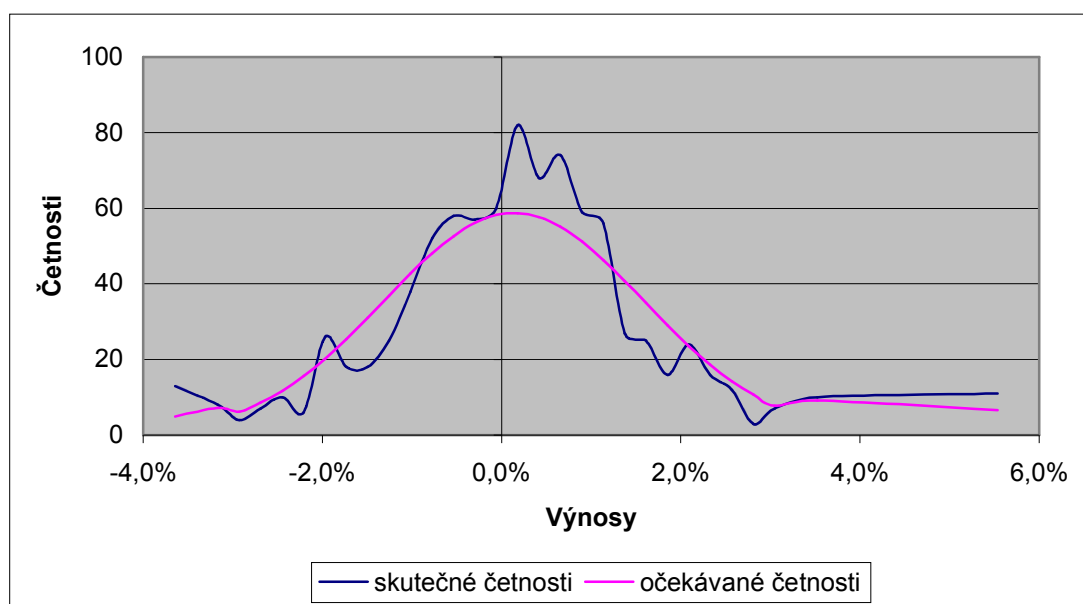
Můžeme si všimnout těžkého konce na levé straně rozdělení, kdy ztráty přibližně větší než 2 % se ve skutečnosti vyskytly vícekrát, než to předpokládá normální rozdělení. Také výnosy blízké střední hodnotě byly častější než u normálního rozdělení.

*Obr. 3.2: Srovnání skutečných a očekávaných četností výnosů akciového portfolia*



V Obr. 3.3 je znázorněno srovnání skutečných četností s očekávanými četnostmi podle normálního rozdělení pro akcie Erste Bank. Těžké konce jsou zde viditelné na levé i na pravé straně rozdělení a výnosy kolem střední hodnoty jsou i zde častější, než by se dalo očekávat v případě normálního rozdělení. Obr. 3.3 je tak grafickým potvrzením skutečnosti, že výnosy Erste Bank nemají normální rozdělení.

Obr. 3.3: Srovnání skutečných a očekávaných četností výnosů akcií Erste Bank



Přestože jsme zjistili, že rozdělení pravděpodobnosti výnosů pro většinu aktiv není normální, budeme v další kapitole určovat VaR za předpokladu, že toto rozdělení výnosů normální je. Výsledky pak porovnáme s výsledky podle teorie extrémních hodnot, která dokáže těžké konce vystihnout.

### 3.2. Výpočet Value at Risk pomocí simulace Monte Carlo

V této části určíme hodnotu Value at Risk portfolia akciových instrumentů pomocí simulace Monte Carlo za předpokladu, že výnosy aktiv mají normální rozdělení výnosů a že vývoj cen akcií a měnových kurzů je určen geometrickým Brownovým pohybem. VaR bude stanovena pro časový horizont jeden den a pro různé úrovně spolehlivosti.

#### 3.2.1. Výpočet volatility

Při modelování tržních cen finančních aktiv hraje velmi důležitou roli volatilita výnosů těchto aktiv. Pro výpočet VaR bylo potřeba odhadnout volatilitu pro 19. prosinec 2007.

Tu určíme pomocí adaptační metody EWMA, která by měla dávat přesnější odhady volatility než metoda historického přístupu. Odhad volatility tedy vypočítáme jako

$$\sigma_{t+1,t} = \sqrt{\lambda \sigma_{t,t-1}^2 + (1 - \lambda) w_t^2}, \quad (3.2)$$

kde  $\sigma_{t+1,t}$  je odhad volatility na čas  $t + 1$  učiněný v čase  $t$ ,  $\lambda$  je tlumící (decay) faktor a  $w_t^2$  je skutečný rozptyl v čase  $t$ . Tlumící faktor byl odhadnut minimalizací kritéria RMSE (Root

Mean Square Error – střední kvadratická chyba) jako optimalizační úloha pomocí Řešitele v Excelu. RMSE vypočítáme podle vztahu

$$RMSE = \frac{1}{T} \sqrt{\sum_{i=1}^T z^2}, \quad (3.3)$$

kde

$$z_t = w_t^2 - \sigma_{t,t-1}^2. \quad (3.4)$$

Jako omezující podmínky bylo pouze zadáno, aby  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Takto tedy byly určeny hodnoty  $\lambda$ .

V následující Tab. 3.4 jsou zobrazeny hodnoty tlumicího faktoru  $\lambda$  a odhad volatility výnosů pro jednotlivá aktiva, při nichž je minimalizovaná hodnota RMSE a tyto hodnoty  $\lambda$  jsou následně využity při výpočtu odhadu jednodenní volatility výnosů pro následující den. Můžeme si všimnout, že pro akcie Zentivy nebo Siemensu nabývá tlumicí faktor vysokých hodnot 0,99 resp. 0,98, které značí, že rozptyl těchto aktiv je v čase velice stálý a hodně se blíží homoskedasticitě. Naproti hodnota tlumicího faktoru 0,89 u akcií Unipetrolu nasvědčuje tomu, že rozptyl je v čase rozkolísanější než u ostatních sledovaných aktiv.

Zaměříme-li se na velikost odhadnuté volatility, zjistíme, že pro obě měny je odhadnutá volatilita mnohem nižší než pro akcie, z čehož se dá usuzovat na vyšší riziko akcií oproti těmto měnám. Také k tomu může přispět skutečnost, že obě měny jsou poměrně stabilní a nepodléhají velkým výkyvům jako některé jiné méně obchodované měny.

*Tab. 3.4: Tlumicí faktor finančních aktiv*

Název akcie	Tlumicí faktor $\lambda$	Odhad volatility $\sigma_{t+1,t}$
ČEZ	0,91	0,0140
Erste Bank	0,95	0,0243
Komerční banka	0,91	0,0174
Telefónica O2 C.R.	0,96	0,0123
Unipetrol	0,89	0,0151
Zentiva	0,99	0,0208
Allianz	0,94	0,0147
BP	0,93	0,0144
Heineken	0,94	0,0116
Siemens	0,98	0,0182
GBP	0,97	0,0052
EUR	0,97	0,0034



Odhady směrodatných odchylek vypočítaných pomocí EWMA budou využity ke generování náhodných cen pomocí geometrického Brownova pohybu.

### 3.2.2. Generování cen aktiv

Ceny akcií a měnové kurzy jsou charakterizovány geometrickým Brownovým pohybem s logaritmickými cenami, který je dán vztahem

$$S_t = S_{t-dt} \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}\right], \quad (3.5)$$

kde  $\varepsilon$  je náhodná hodnota pocházející z normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ ,  $\mu$  je střední hodnota spojitých výnosů a  $\sigma$  je volatilita výnosů. V našem případě, kdy uvažujeme s časovým horizontem jednoho dne a platí tedy, že  $dt = 1$ , přechází minulá rovnice (3.5) do tvaru

$$S_t = S_{t-1} \cdot \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot \varepsilon\right). \quad (3.6)$$

K přesnému modelování vývoje portfolia je zapotřebí dostatečně velké množství scénářů o vývoji rizikových faktorů, kterými je toto portfolio ovlivněno. V našem případě generujeme deset tisíc scénářů pro dvanáct rizikových faktorů, kterými je deset cen akcií a dva měnové kurzy. To také znamená, že pro každý rizikový faktor je nutné vygenerovat deset tisíc náhodných hodnot  $\varepsilon$  z normálního rozdělení, pomocí nichž jsou stanoveny tržní cena akcií pro každý scénář. Tyto vygenerované náhodné prvky mezi sebou nejsou nijak korelovány.

S využitím metody AVM popsané v kapitole 2.4.1 vygenerujeme pouze pět tisíc náhodných hodnot a druhých pět tisíc hodnot jednoduše získáme jako opačné hodnoty již vygenerovaných hodnot. To nám zajistí, že střední hodnota náhodných hodnot bude rovna nule. Celkem tedy získáme deset tisíc náhodných proměnných pro deset tisíc scénářů. Hodnoty byly vygenerovány pomocí generátoru pseudonáhodných čísel, který je součástí Excelu.

### 3.2.3. Generování závislých proměnných

Než však dosadíme všechny proměnné do předpisu geometrického Brownova pohybu, musíme si uvědomit, že mezi rizikovými faktory je určitá korelace a ta by měla být při generování cen zohledněna. Proto zjistíme skutečnou korelaci (resp. kovarianci) mezi

náhodnými hodnotami  $\varepsilon$  jednotlivých aktiv. Abychom to mohli udělat, musíme si z časových řad cen aktiv tyto hodnoty nejprve vyjádřit. Z rovnice (3.6) vyplývá, že

$$\varepsilon = \frac{\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}. \quad (3.7)$$

Pro takto vypočítané náhodné hodnoty stanovíme jejich vzájemné kovariance ve formě kovarianční matice  $C$ . Kovariance je určena vztahem

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{i,t} - \bar{r}_i) \cdot (r_{j,t} - \bar{r}_j). \quad (3.8)$$

K zajištění požadované korelace (resp. kovariance) mezi generovanými náhodnými prvky je používán postup zvaný Choleskeho dekompozice. Ze vzniklé kovarianční matice je vypočtena Choleskeho matice  $A$ , pro kterou musí platit

$$C = AA^T \quad (3.9)$$

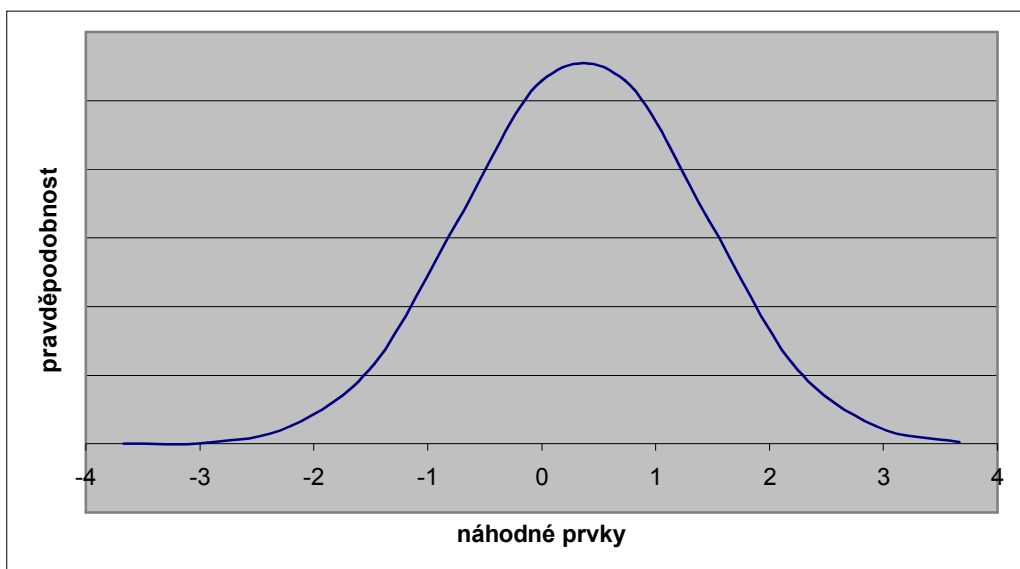
kde  $A$  je dolní trojúhelníková matice

Vzhledem k tomu, že počítáme s 12 rizikovými faktory, byl by výpočet Choleskeho matice o 12 řádcích a 12 sloupcích velmi náročný a snadno by se v něm udělala chyba. Proto bylo k výpočtu Choleskeho matice použito speciálního software Matrix, který je volně dostupný na internetové adrese <http://digilander.libero.it/foxes>. Tento program po přidání mezi doplňky Excelu vložil k již stávajícím funkcím také funkce pro počítání s maticemi a lineární algebru, mezi nimiž byla funkce MCholesky pro určení Choleskeho matice.

Výsledkem použití této funkce byla dolní trojúhelníková matice. Vzhledem k tomu, že vygenerované náhodné prvky pro jednotlivé faktory byly zadány ve sloupcích, bylo nutné Choleskeho matici transponovat na horní trojúhelníkovou matici.

Na následujícím Obr. 3.4 je zobrazeno rozdělení pravděpodobnosti generovaných náhodných prvků. Je zřejmé, že se jedná o normální rozdělení charakterizované typickou Gaussovou křivkou.

Obr. 3.4: Rozdělení pravděpodobnosti generovaných proměnných



Vygenerované náhodné prvky nejsou korelovány, pro potřeby simulace vývoje hodnoty portfolia je však důležité, aby mezi prvky byla korelace empiricky zjištěná z historických údajů. K tomu využijeme Choleskeho horní trojúhelníkovou matici  $A^T$ , kterou jsme získali pomocí Choleskeho dekompozice z matice kovarianční.

Pro transformaci nekorelovaných prvků na korelované využijeme vztahu

$$\varepsilon = \eta \cdot A^T, \quad (3.10)$$

kde  $\varepsilon$  jsou korelované náhodné prvky a  $\eta$  označuje nekorelované prvky.

Takto vypočtené hodnoty náhodných proměnných můžeme dosadit do funkčního předpisu geometrického Brownova procesu s logaritmickými cenami pro akcie a měny a získáme tím deset tisíc simulovaných cen pro každé aktivum. Tyto ceny jsou rozděleny podle logaritmicko-normálního rozdělení. Například cena akcie ČEZ byla pro první scénář podle rovnice (3.6) vypočítaná takto,

$$S_1 = 1397 \cdot \exp\left(0,002248 - \frac{0,000197}{2} + 0,014026 \cdot (-0,320446)\right) = 1393,73 \text{ Kč}.$$

### 3.2.4. Stanovení VaR

Abychom mohli stanovit hodnotu VaR portfolia finančních aktiv, je nutné nejprve určit hodnotu zahraničních akcií v českých korunách. Simulovanou hodnotu akcie tedy přepočítáme pomocí simulovaného měnového kurzu pro stejný scénář. Vektor cen akcií

v CZK pak vynásobíme vektorem s počty kusů jednotlivých akcií v portfoliu a získáme simulované hodnoty portfolia v CZK.

Hodnota Value at Risk je definována jako hodnota ztráty na nějaké předem určené hladině pravděpodobnosti. Proto pro každý scénář a každou simulovanou hodnotu portfolia vypočteme změnu v hodnotě tohoto portfolia (zisk nebo ztrátu) oproti počátečnímu stavu, tedy oproti 18. prosinci 2007.

VaR na hladině významnosti  $\alpha$  můžeme získat tak, že změny v hodnotě portfolia seřadíme od nejhorších a VaR je pak rovna  $n$ -té nejhorší hodnotě s opačným znaménkem (protože VaR představuje **ztrátu** čili opačný zisk). Pořadí  $n$ -té nejhorší hodnoty se určí tak, že  $n = \alpha \cdot N$ , kde  $N$  označuje počet scénářů. Počítáme-li tedy VaR na hladině spolehlivosti 5 % pro 10 000 scénářů, pak  $n = 0,05 \cdot 10\,000 = 500$  a hodnota VaR je tedy 500. nejhorší hodnota změny hodnoty portfolia s opačným znaménkem.

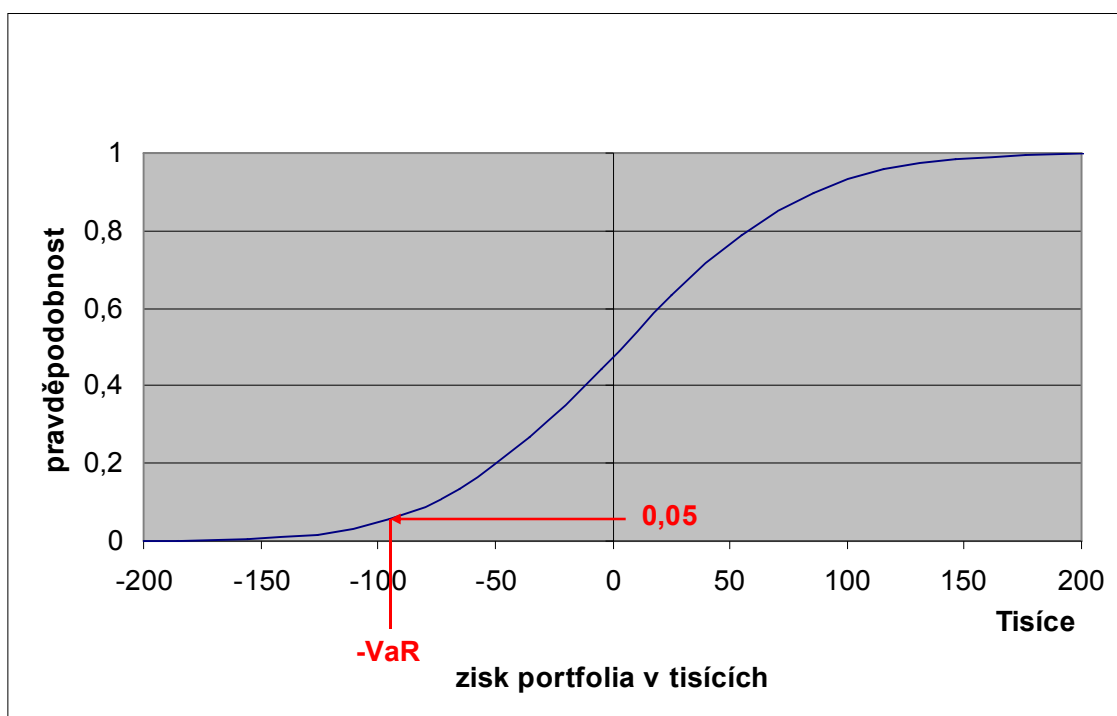
Pro přesnější výsledek vypočítáme Value at Risk jako pátý percentil rozdělení pravděpodobnosti změny hodnoty portfolia. Dostaneme výsledek -97 394 Kč, který představuje hodnotu zisku. Value at Risk, jak již bylo několikrát zmíněno, je definován jako ztráta, proto použijeme opačnou hodnotu tohoto čísla a můžeme říci, že Value at Risk daného portfolia s časovým horizontem jednoho dne na hladině spolehlivosti 95 procent je 97 394 Kč. Toto číslo interpretujeme tak, že naše portfolio s pravděpodobností 95 % neutrpí větší ztrátu než 97 394 Kč.

Výsledek je graficky zobrazen v následujícím Obr. 3.5. Distribuční funkce je obecně definována jako funkce, která každému reálnému  $x$  přiřazuje pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná  $X$  nabývá hodnot menších než  $x$ , neboli

$$F(x) = P(X < x). \quad (3.11)$$

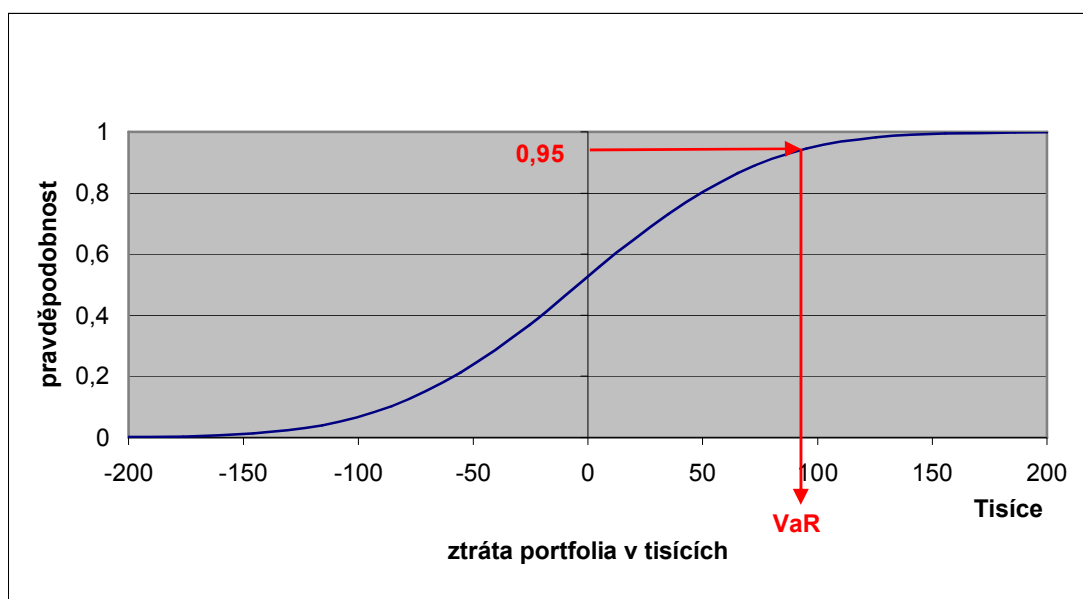
Podle obecné definice distribuční funkce můžeme naši situaci definovat tak, že pravděpodobnost, že zisk bude menší než hodnota  $-VaR$ , je 0,05.

Obr. 3.5: Grafické určení VaR z distribuční funkce zisku



Na Obr. 3.5 je znázorněno odvození hodnoty VaR (nebo spíše hodnoty minus VaR) z distribuční funkce zisku, kde na kladné části osy  $x$  je zobrazen zisk a na záporné části ztráta. Tuto funkci lze také obrátit tak, abychom měli na kladné části osy  $x$  ztrátu a na záporné části osy zisk a z tohoto grafu bude možné odvodit přímo hodnotu VaR. Tato situace je graficky zobrazena v Obr. 3.6.

Obr. 3.6: Odvození VaR z distribuční funkce ztráty portfolia



Můžeme také říci, že s pravděpodobností 0,95 bude ztráta portfolia menší než VaR nebo že s pravděpodobností 0,05 bude ztráta větší než VaR.

Hodnota Value at Risk byla vypočítána také pro další úrovně spolehlivosti a výsledky jsou zaznamenány v Tab. 3.5. Z tabulky je zřejmé, že s rostoucí hladinou spolehlivosti podle očekávání roste i VaR.

*Tab. 3.5: Value at Risk pro různé hladiny spolehlivosti*

<b>Spolehlivost</b>	95 %	96 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %
<b>VaR</b>	97 394	104 864	116 785	139 676	154 098	192 213

### 3.2.5. Stanovení expected shortfall

Nevýhodou vypočítané hodnoty VaR je, že nám nic neříká o velikosti možných ztrát za daným pravděpodobnostním kvantilem, tedy v případě, že ztráta bude větší než VaR. Na hladině spolehlivosti 95 procent očekáváme, že taková situace nastane v pěti případech ze sta. Proto vypočítáme expected shortfall ( $ES$ ), která vyjadřuje střední hodnotu ztráty v případě, že je překročena hodnota VaR. Matematicky ji můžeme vyjádřit vztahem

$$ES_{\alpha}(X) = E[-X / -X > VaR_{\alpha}(X)], \quad (3.12)$$

kde náhodná proměnná  $X$  představuje zisk.

Expected shortfall na hladině spolehlivosti 95 % jsme tedy jednoduše vypočítali jako průměr opačných hodnot simulovaných změn v hodnotě portfolia a to těch změn, které přesáhly hodnotu  $VaR = 97\,394$  na stejné hladině spolehlivosti. Výsledná hodnota  $ES$  je 123 468 a je větší než VaR, což už vyplývá ze samotné definice expected shortfall.

Stejným způsobem jako pro hladinu spolehlivosti 95 % byly vypočítány hodnoty VaR a expected shortfall i pro další hladiny spolehlivosti. Jejich hodnoty jsou zobrazeny v Tab. 3.6.

*Tab. 3.6: Hodnoty ES pro různé hladiny spolehlivosti*

<b>Spolehlivost</b>	95 %	96 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %
<b>ES</b>	123 468	129 105	140 213	160 312	174 406	201 073

Tak jako se s rostoucí hladinou spolehlivosti zvyšuje VaR, zvyšuje se i expected shortfall.

### 3.2.6. Výpočet pravděpodobnosti vybraných ztrát

Známe-li rozdělení pravděpodobnosti změn hodnot portfolia, můžeme také určit rozdělení pravděpodobnosti výnosů portfolia. Z něj můžeme určit například pravděpodobnost toho, že portfolio utrpí ztrátu větší než 2 %. Tuto pravděpodobnost vypočítáme jako hodnotu distribuční funkce rozdělení pravděpodobnosti zisků portfolia pro proměnnou  $-0,02$  a dostaneme výsledek 0,0343. Pravděpodobnost, že ztráta portfolia bude větší než 2 % je tedy 0,0343. Tab. 3.7 uvádí pravděpodobnosti i pro další hodnoty ztrát.

*Tab. 3.7: Pravděpodobnosti vybraných ztrát podle normálního rozdělení*

<b>Ztráta větší než</b>	<b>2 %</b>	<b>3 %</b>	<b>4 %</b>	<b>5 %</b>
<b>Pravděpodobnost</b>	0,034302	0,003527	0,000180	0,000004

### 3.3. Výpočet VaR pomocí Teorie extrémních hodnot

Výpočet Value at Risk za předpokladu normálního rozdělení jsou podceněna možná rizika, protože empirické rozdělení pravděpodobnosti má těžší konce než normální rozdělení, z čehož vyplývá, že pravděpodobnost výskytu velkých změn v tržních sazbách (kladných i záporných změn) je ve skutečnosti mnohem vyšší, než bychom očekávali za předpokladu normálního rozdělení.

Jednou z možností vystihnoutí těžkých konců rozdělení je právě teorie extrémních hodnot (EVT), která se zabývá výskytem extrémních odchylek od střední hodnoty rozdělení pravděpodobnosti.

Prostou logickou úvahou dojdeme k tomu, že hodnota Value at Risk vypočtená pomocí EVT musí být nutně vyšší než VaR vypočtená za předpokladu normálního rozdělení, což také vyplývá z Obr. 2.7. Je zřejmé, že očekávaná ztráta s pravděpodobností například 5 % je u skutečných výnosů i podle EVT vyšší než u normálního rozdělení, proto také musí být i hodnota Value at Risk vypočtená podle EVT vyšší než VaR za vypočtena předpokladu normálního rozdělení.

#### 3.3.1. Analýza konců rozdělení

Prvním krokem při analýze konce rozdělení je stanovení hodnoty  $u$ . Je to percentil pravděpodobnostního rozdělení a EVT se poté zabývá pouze částí parametrického rozdělení nacházející se nad touto zvolenou úrovní, která charakterizuje konec rozdělení finančních

výnosů. Podle Hulla (2007) můžeme při modelování pravého konce rozdělení zvolit za proměnnou  $u$  hodnotu blízkou 95. percentilu rozdělení.

Musíme si však uvědomit, že analýza popsaná v kapitole 2.6.5 se zabývá **pravým** koncem rozdělení pravděpodobnosti. Zajímá-li nás **levý** konec, můžeme použít stejnou metodologii s tím rozdílem, že místo proměnných  $x$  budeme počítat s jejich opačnými hodnotami, tedy  $-x$ . To znamená, že nás bude zajímat pravý konec rozdělení pro náhodné proměnné  $-x$ .

Hodnota devadesátého pátého percentilu rozdělení pravděpodobnosti opačných výnosů je 0,015457. Proto za hodnotu  $u$  zvolíme 0,015 a dále se budeme zabývat pouze koncem rozdělení pro náhodné hodnoty větší než 0,015. Budeme se tedy zabývat pouze ztrátami přesahujícími 1,5 %. Hodnotou  $n_u$  je označen počet sledovaných proměnných, které přesáhly hodnotu  $u$ . V našem případě je to počet dnů, v nichž utrpělo portfolio ztrátu větší než 0,015. Takových dní bylo za sledované období zaznamenáno celkem 46. Hodnotou  $n$  je označen celkový počet pozorování, tedy 890 dnů.

### 3.3.2. Odhad parametrů modelu

Dalším krokem byl odhad parametrů  $\beta$  a  $\xi$  pomocí metody maximální věrohodnosti. Tento výpočet je zobrazen v tabulce v Příloze č. 2, kde jsou v prvním sloupci seřazeny denní výnosy menší než -1,5 % (resp. denní ztráty větší než 1,5 %), ve druhém sloupci jejich opačné hodnoty a ve třetím sloupci hodnota

$$\ln \left[ \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta} \right)^{-1/\xi - 1} \right] \quad (3.13)$$

pro jednotlivé výnosy  $x_i$ . Součet hodnot ve třetím sloupci představuje funkci věrohodnosti, jejíž hodnotu chceme maximalizovat.

Parametry  $\beta$  a  $\xi$  byly odhadnuty jako řešení optimalizační úlohy s účelovou funkcí představovanou funkcí věrohodnosti, která jde do maxima, a omezujícími podmínkami  $\beta > 0$  a  $\xi \geq 0$ . Výsledkem je hodnota funkce věrohodnosti 168,91079 a parametry  $\beta = 0,00903$  a  $\xi = 0,03568$ .

### 3.3.3. Výpočet pravděpodobností vybraných ztrát

Předpokládejme, že chceme odhadnout pravděpodobnost, že  $x$  bude menší než 0,04, čili pravděpodobnost toho, že portfolio utrpí ztrátu menší než čtyři procenta (nesmíme



zapomínat, že pracujeme s opačnými hodnotami zisků a ztrát). Tuto pravděpodobnost vypočteme podle rovnice (2.70) jako hodnotu distribuční funkce pro proměnnou 0,04, tedy

$$F(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left( 1 + \xi \frac{x - u}{\beta} \right)^{-1/\xi},$$

po dosazení dostaneme

$$F(0,04) = 1 - \frac{46}{890} \left( 1 + 0,03568 \frac{0,04 - 0,015}{0,00903} \right)^{-1/0,03568} = 0,99632,$$

kde hodnota 0,99632 je pravděpodobnost, že portfolio utrpí ztrátu **menší** než 4 %. Pravděpodobnost, že portfolio utrpí ztrátu **větší** než čtyři procenta, vypočítáme jako zbytek do jedné, tedy  $1 - 0,99632 = 0,00368$ .

Podobně jako pro ztrátu větší než 4 % vypočítáme hodnoty distribučních funkcí také pro hodnoty 2 %, 3 % a 5 %, tedy pravděpodobnosti, že ztráty přesáhnou tyto hodnoty. Výsledky jsou zobrazeny v Tab. 3.8.

Tab. 3.8: Pravděpodobnosti vybraných ztrát podle EVT

<b>Ztráta větší než</b>	2 %	3 %	4 %	5 %
<b>Pravděpodobnost</b>	0,0299	0,0103	0,0037	0,0014

### 3.3.4. Výpočet VaR

Konečnou fází stanovení VaR je výpočet podle vzorce (2.73), tedy

$$VaR_j = u + \frac{\beta}{\xi} \left[ \left( \frac{n}{n_u} (1 - q) \right)^{-\xi} - 1 \right],$$

kde  $q$  určuje hladinu spolehlivosti. Dosadíme příslušné hodnoty a pro hladinu spolehlivosti 95 % dostaneme

$$VaR_j = 0,015 + \frac{0,00903}{0,03568} \left[ \left( \frac{890}{46} (1 - 0,95) \right)^{-0,03568} - 1 \right] = 0,0153,$$

kde výsledná hodnota 0,0153 představuje jednotkovou VaR, čili VaR portfolia o velikosti jedné koruny. Pro výpočet VaR portfolia je nutné tuto hodnotu vynásobit hodnotou portfolia.

VaR akciového portfolia s časovým horizontem jednoho dne na hladině spolehlivosti 95 % podle EVT tedy je

$$VaR = 5\,524\,541 \cdot 0,0153 = 84\,522 \text{ Kč}.$$

Stejným způsobem jako pro hladinu spolehlivosti 95 % vypočteme podle vzorce (2.73) i VaR portfolia na dalších hladinách spolehlivosti. Tyto výsledky jsou shrnuty v následující Tab. 3.9.

*Tab. 3.9: Hodnoty VaR podle EVT*

<b>hladina spolehlivosti</b>	95 %	96 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %
<b>jednotkový VaR</b>	0,01530	0,01732	0,02164	0,03027	0,03699	0,05324
<b>VaR portfolia</b>	84 522	95 707	119 558	167 222	204 329	294 110

### 3.4. Porovnání výsledků

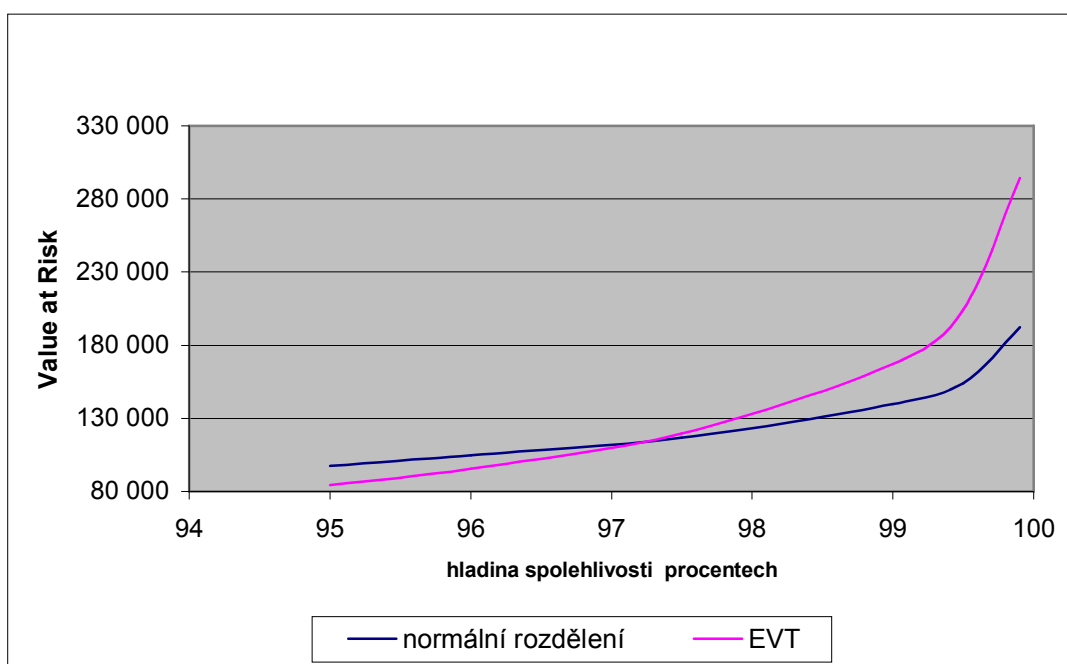
Nyní můžete porovnat výsledky stanovení Value at Risk dvěma různými metodami – pomocí simulace Monte Carlo s předpokladem normálního rozdělení pravděpodobnosti výnosů a prostřednictvím teorie extrémních hodnot. Tyto výsledky jsou shrnuty v Tab. 3.10 pro různé úrovně hladiny spolehlivosti, zobrazen je také rozdíl mezi vypočtenými hodnotami VaR pro dané hladiny spolehlivosti.

*Tab. 3.10: Shrnutí výsledků*

<b>Hladina spolehlivosti</b>	95 %	96 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,9 %
<b>Normální rozdělení</b>	97 394	104 864	116 785	139 676	154 098	192 213
<b>EVT</b>	84 522	95 707	119 558	167 222	204 329	294 110
<b>rozdíl</b>	-12 872	-9 157	2 773	27 547	50 231	101 897

Hodnoty z Tab. 3.10 jsou graficky zobrazeny v následujícím Obr. 3.7.

Obr. 3.7: Porovnání VaR s normálním rozdělením a pomocí EVT



Můžeme také vypočítat souřadnice průsečíku obou grafů. Určíme je jako řešení optimalizační úlohy, kde účelovou funkcí bude minimalizace absolutní hodnoty rozdílu VaR s normálním rozdělením a VaR podle EVT. Omezující podmínkou je, aby  $0 < \alpha < 1$ .

Dostaneme výsledek, že hodnoty VaR jsou shodné pro hladinu spolehlivosti 97,235 % a hodnoty VaR při této spolehlivosti jsou 114 417 Kč. Od hladiny spolehlivosti  $\alpha = 97,235\%$  budou hodnoty Value at Risk vypočítané podle teorie extrémních hodnot převyšovat hodnoty Value at Risk vypočítané za předpokladu normálního rozdělení. Za tímto průsečíkem se bude s rostoucí hladinou spolehlivosti zvyšovat i rozdíl mezi vypočtenými hodnotami pomocí obou metod, což je názorně vidět i v Obr.3.7.

Při výpočtu Value at Risk za předpokladu normálního rozdělení pravděpodobnosti výnosů je nejčastěji používána hladina spolehlivosti 95 %, která je použita například také v RiskMetrics – Technical Document (1996). Výpočet VaR je založen na hladině spolehlivosti 95 % proto, neboť na vyšších hladinách spolehlivosti mohou být tyto výpočty VaR z důvodu těžkých konců rozdělení pravděpodobnosti výnosů velice nepřesné a mohou způsobit podcenění rizik. Pro portfolio, jehož složení je uvedeno v Tab. 3.1, začíná sice hodnota VaR podle EVT převyšovat hodnotu VaR s předpokladem normálního rozdělení přibližně až na hladině spolehlivosti 97 %, u jiných portfolií tomu však může být už na

nižších hladinách spolehlivosti kolem 95 %. Do hladiny spolehlivosti 95 % jsou výpočty VaR s předpokladem normálního rozdělení relativně přesné.

V Tab. 3.11 jsou porovnány pravděpodobnosti výskytu vybraných ztrát. Ztráta 2 % je ještě pravděpodobnější za předpokladu normálního rozdělení, ale ztrátě 3 % již přiřazuje větší pravděpodobnost EVT. Ztráta, při níž se sobě pravděpodobnosti vypočítané podle obou metod rovnají, je 2,15 %. Ztráty větší než tato hodnota jsou pak pravděpodobnější podle teorie extrémních hodnot.

S rostoucí velikostí ztráty se zvyšuje i poměr pravděpodobností výskytu ztrát podle EVT a podle normálního rozdělení. Například pravděpodobnost, že portfolio utrpí ztrátu větší než čtyři procenta, je podle EVT přibližně 20 x větší, než je očekáváno při předpokladu normálního rozdělení.

*Tab. 3.11: Porovnává pravděpodobnosti výskytu daných ztrát.*

<b>Ztráta větší než</b>	2 %	3 %	4 %	5 %
<b>Pravděpodobnost</b> $N(\mu, \sigma^2)$	0,0343	0,0035	0,00018	0,000004
<b>Pravděpodobnost EVT</b>	0,0299	0,0103	0,0037	0,0014
<b>poměr</b>	0,87	2,92	20,45	305,15

Při použití teorie extrémních hodnot nejsou kladeny žádné požadavky na typ rozdělení pravděpodobnosti a EVT se zabývá pouze koncem rozdělení. Jak vyplývá z Obr. 2.7, EVT dokáže lépe modelovat vývoj konce rozdělení pravděpodobnosti skutečných výnosů než je tomu u výpočtu Value at Risk, který předpokládá normální rozdělení výnosů finančních aktiv.

Výpočet Value at Risk pomocí teorie extrémních hodnot je na vysokých hladinách spolehlivosti přesnější, než výpočet Value at Risk předpokládající normální rozdělení výnosů. Stanovením VaR na vysokých hladinách spolehlivosti pomocí EVT nejsou podceněna skutečná tržní rizika, kterým je portfolio vystaveno.

## Závěr

V první kapitole byl vymezen pojem finančního rizika a bylo provedeno rozdělení finančních rizik, byly popsány způsoby výpočtu výnosů a způsoby kvantifikace rizik. Dále byly vysvětleny základní metody eliminace rizik, jako jsou diverzifikace portfolia a hedging. Na závěr kapitoly byla vysvětlena potřeba regulace finančních institucí a byl přiblížen koncept kapitálové přiměřenosti.

Ve druhé kapitole byl vysvětlen princip ukazatele Value at Risk (VaR), bylo nastíněno obecné odvození VaR a byly popsány jednotlivé metody výpočtu VaR. Dále byla kapitola věnována také problematice modelování tržní ceny akcie, odhadu volatility a simulační technice Monte Carlo. V závěru kapitoly byla diskutována problematika těžkých konců rozdělení pravděpodobnosti a byly navrženy metody pro zahrnutí těžkých konců do stanovení hodnoty VaR.

Smyslem třetí kapitoly bylo stanovit VaR akciového portfolia s časovým horizontem jednoho dne na různých hladinách spolehlivosti pomocí dvou metod – pomocí simulace Monte Carlo za předpokladu normálního rozdělení a pomocí teorie extrémních hodnot. Za tímto účelem bylo sestaveno akciové portfolio a poté byl proveden test normality výnosů aktiv tohoto portfolia, kde bylo zjištěno, většina aktiv nemá normální rozdělení výnosů.

Při prvním způsobu výpočtu VaR pomocí simulace Monte Carlo byly ceny generovány podle geometrického Brownova pohybu s využitím metody EWMA pro odhad volatility a Choleskeho dekompozice pro zajištění požadované korelace mezi náhodnými prvky. Hodnoty VaR byly poté stanoveny jako opačné hodnoty percentilů rozdělení pravděpodobnosti změn hodnot portfolia. Stanoveny byly také hodnoty expected shortfall.

Druhým způsobem stanovení VaR bylo využití teorie extrémních hodnot. Byly odhadnuty parametry funkce pro výpočet VaR, který byl následně určen pro různé úrovně spolehlivosti.

Na závěr byly výsledky obou metod porovnány. Bylo zjištěno, že pro hladiny spolehlivosti přibližně do 97 % byly větší ty hodnoty VaR, jež byly stanoveny za předpokladu normálního rozdělení, za touto hranicí pak nabývala vyšších hodnot VaR stanovená pomocí EVT. Ukázalo se, že rozdíl mezi výsledky těchto dvou metod se s rostoucí hladinou spolehlivosti ještě zvyšoval. Pro výpočet Value at Risk na vysokých hladinách spolehlivosti je vhodné použít EVT, neboť dokáže lépe vystihnout těžké konce rozdělení a nezpůsobí tak podcenění rizik.

## Použitá literatura

BREALEY, Richard A., MYERS, Stewart C. *Teorie a praxe firemních financí*. 1. vyd. Praha : Computer Press, 2000. xix, 1064 s. ISBN 80-7226-189-4.

CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. 1. vyd. Praha : HZ, 2000. 241 s. ISBN 80-86009-35-1.

ČIHÁK, Petr. Trendy v řízení tržních rizik : vývoj metody Value at Risk. *Bankovníctví*. 2001, č. 10, s. 14-16. ISSN 1212-4273.

HEINRICH, Daniel. Význam stress testingu v oblasti risk managementu. In *Finanční řízení podniků a finančních institucí : sborník vybraných příspěvků z 5. mezinárodní konference : Ostrava, 7.-8. září 2005*. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2005. s. 120-126. Dostupný z WWW: <<http://www.ekf.vsb.cz/shared/uploadedfiles/cul33/Heinrich.pdf>>.

HRADECKÝ, Pavel, MADRYOVÁ, Anna, TURČAN, Matěj. *Pravděpodobnost*. 1. vyd. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1998. 168 s. ISBN 80-7078-442-3.

HULL, John. *Options, Futures and Other Derivatives*. 6th edition. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2006. xxii, 789 s. ISBN 0-13-149908-4.

HULL, John. *Risk Management and Financial Institutions*. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2007. xvi, 500 s. ISBN 0-13-239790-0.

JÍLEK, Josef. *Finanční rizika*. 1. vyd. Praha : Grada Publishing, 2000. 635 s. ISBN 80-7169-579-3.

JORION, Philippe. *Value at Risk : The New Benchmark For Managing Financial Risk*. 2nd edition. New York : McGraw-Hill, 1997. xxxi, 544 s. ISBN 0-07-135502-2.

LONGERSTAEY, Jacques, SPENCER, Martin. *RiskMetrics - Technical Document*. 4th edition. New Jersey : RiskMetrics Group, 1996. xii, 283 s. Dostupný z WWW: <<http://www.riskmetrics.com/pdf/dnldtechdoc/td4e.pdf>>.

POLÁCH, Jiří. *Kapitálové trhy*. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. 367 s. ISBN 80-278-0134-5.

STRNAD, Petr. Řízení tržních rizik s použitím teorie extrémních hodnot a copula funkcí. In *Řízení a modelování finančních rizik : Sborník vybraných příspěvků*. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2006. s. 339-348. Dostupný z WWW: <<http://www.ekf.vsb.cz/shared/uploadedfiles/cul33/Petr.Strnad.pdf>>.

ŠTURC, Boris. Regulace činnosti bank v ČR : 3. část. *Finančné trhy : Odborný mesačník pre teóriu a prax finančných trhov* [online]. 2006, č. 3 [cit. 2008-04-02]. Dostupný z WWW: <<http://www.derivat.sk/index.php?PageID=267>>. ISSN 1336-5711.

TICHÝ, Tomáš. *Finanční deriváty*. 1. vyd. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2006. vii, 162 s. ISBN 80-248-1180-4.

TURČAN, Matěj, et al. *Statistika*. 1. vyd. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. 162 s. ISBN 80-248-0131-0.

## Seznam zkratk a symbolů

### Zkratky:

<b>AVM</b>	antithetic variable method (metoda protikladných proměnných)
<b>CZK</b>	česká koruna
<b>ČNB</b>	Česká národní banka
<b>ES</b>	expected shortfall (očekávaná extrémní ztráta)
<b>EUR</b>	euro
<b>EVT</b>	extreme value theory (teorie extrémních hodnot)
<b>EWMA</b>	exponentially weighted moving average (exponenciálně vážený klouzavý průměr)
<b>GARCH</b>	generalized autoregressive conditional heteroscedasticity (zobecněný model podmíněného rozptylu)
<b>GED</b>	generalized error distribution
<b>GBP</b>	britská libra
<b>KTRK</b>	krytí tržního rizika kapitálem
<b>MBP</b>	mimobilanční položky
<b>OTC</b>	over the counter (přes přepážku – mimoburzovní trh)
<b>pdf</b>	probability density function (hustota pravděpodobnosti)
<b>Pr</b>	pravděpodobnost
<b>RMSE</b>	root mean square error (střední kvadratická chyba)
<b>RVA</b>	Rizikově vážená aktiva
<b>VaR</b>	Value at Risk



## Symbols:

$\alpha$	hladina významnosti
$\beta$	koeficient beta, parametr teorie extrémních hodnot
cov	kovariance
$\partial$	derivace
$dt$	délka časového období
$dz$	specifický Wienerův proces
$e$	Eulerovo číslo
$E(\cdot)$	střední hodnota veličiny
$\varepsilon$	náhodná hodnota z $N(0,1)$
$\eta$	nekorelované náhodné prvky z $N(0,1)$
$f_i$	skutečné četnosti
$f_{oi}$	očekávané četnosti
$\Phi(\alpha)$	distribuční funkce normálního rozdělení pro hodnotu $\alpha$
$\Gamma$	gama funkce
$\chi^2$	testovací kritérium testu dobré shody, náhodná proměnná z rozdělení $\chi^2$
$\xi$	náhodná proměnná z GED rozdělení, parametr EVT
$L$	funkce věrohodnosti
$\ln$	přirozený logaritmus
$\lambda$	tlumicí faktor
$\mu$	střední hodnota
$N$	počet pozorování
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$
$n$	počet stupňů volnosti Studentova rozdělení, celkový počet pozorování
$n_u$	počet hodnot, které přesáhly hodnoty $u$
$\nu$	parametr GED rozdělení
$P$	cena aktiva
$\Pi$	zisk
$q$	hladina spolehlivosti
$r$	výnos

$r_f$	bezriziková sazba
$r_M$	výnos tržního portfolia
$\rho$	korelace
$S$	cena aktiva
$\sigma$	směrodatná odchylka
$\sigma^2$	rozptyl
$\sigma_{t+1,t}^2$	odhad rozptylu na čas $t + 1$ učiněný v čase $t$
$\Sigma$	suma
$t$	počáteční čas
$T$	konečný čas, náhodná proměnná ze Studentova rozdělení
var	rozptyl
$W$	obor kritických hodnot
$x$	hladina spolehlivosti
$x_i$	podíl $i$ – tého aktiva v portfoliu
$X$	náhodná proměnná

## Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou (bakalářskou) práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo,
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou (bakalářskou) práci užít (§ 35 odst. 3),
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové (bakalářské) práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové (bakalářské) práci, obsažené v Záznamu o závěrečné práci, umístěném v příloze mé diplomové (bakalářské) práce, budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO,
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona,
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou (bakalářskou) práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne .....

.....  
jméno a příjmení studenta

Adresa trvalého pobytu studenta:

.....

## **Seznam příloh**

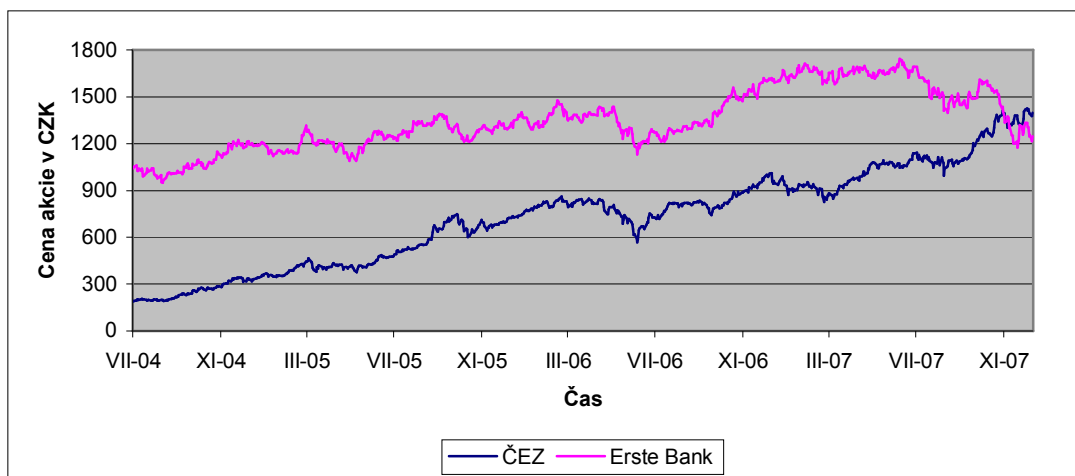
### **Příloha č.1: Vývoj cen aktiv**

- Obr. I: Vývoj cen akcií ČEZ a Erste Bank
- Obr. II: Vývoj cen akcií Komerční banky
- Obr. III: Vývoj cen akcií Telefónica O2 C.R
- Obr. IV: Vývoj cen akcií Unipetrol
- Obr. V: Vývoj cen akcií Zentiva
- Obr. VI: Vývoj cen akcií Allianz
- Obr. VII: Vývoj cen akcií BP
- Obr. VIII: Vývoj cen akcií Heineken
- Obr. IX: Vývoj cen akcií Siemens
- Obr. X: Vývoj měnového kurzu CZK/GBP
- Obr. XI: Vývoj měnového kurzu CZK/EUR

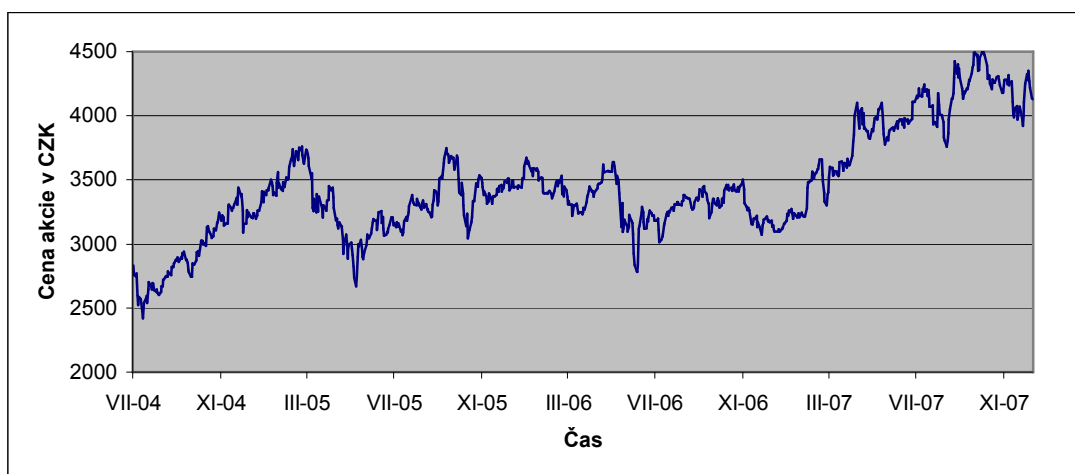
### **Příloha č. 2: Stanovení parametrů extrémních hodnot**

## Příloha č. 1: Vývoj cen aktiv

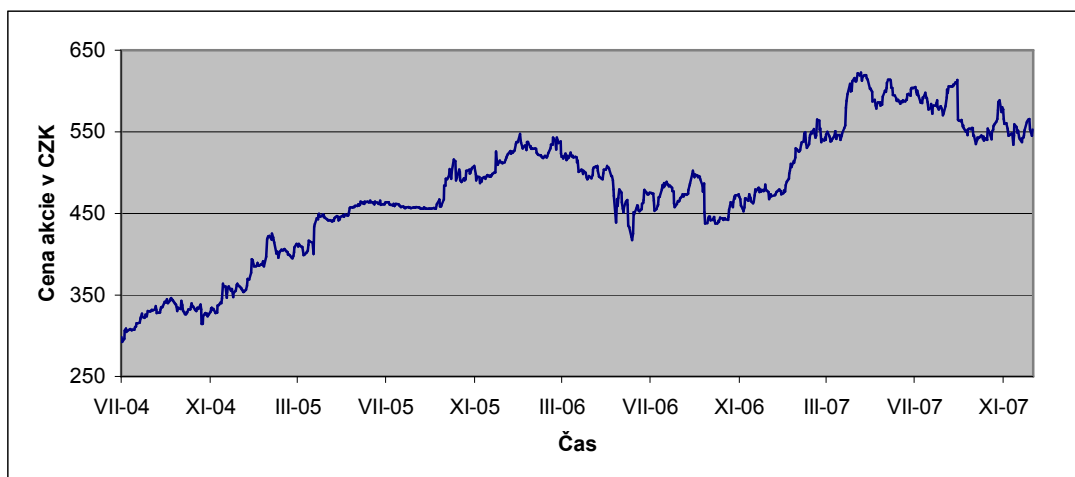
*Obr. I: Vývoj cen akcií ČEZ a Erste Bank*



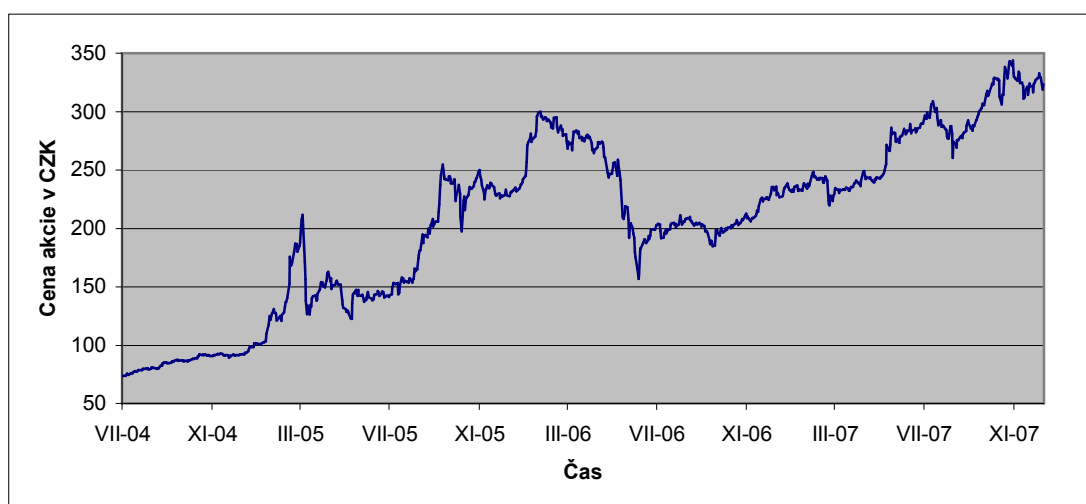
*Obr. II: Vývoj cen akcií Komerční banky*



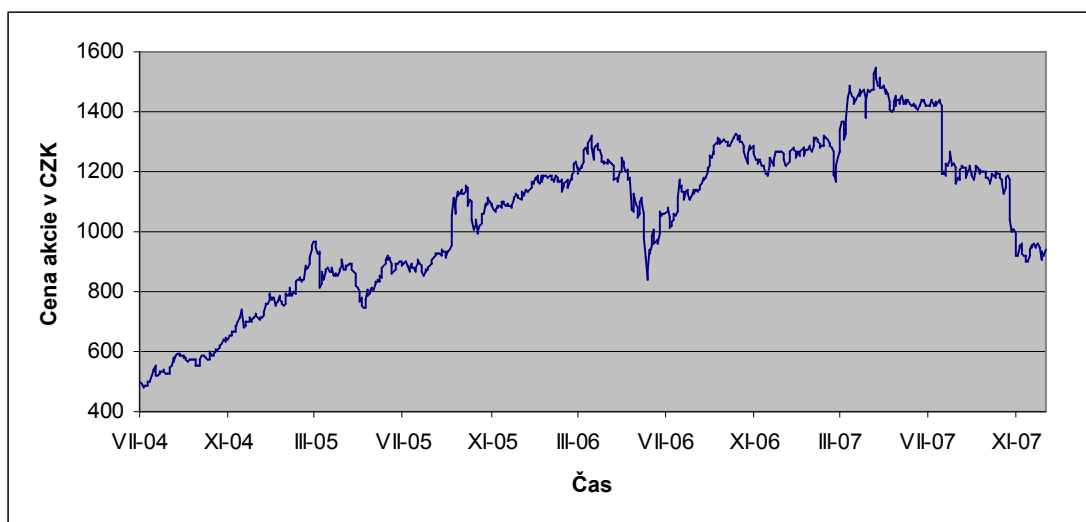
*Obr. III: Vývoj cen akcií Telefónica O2 C.R.*



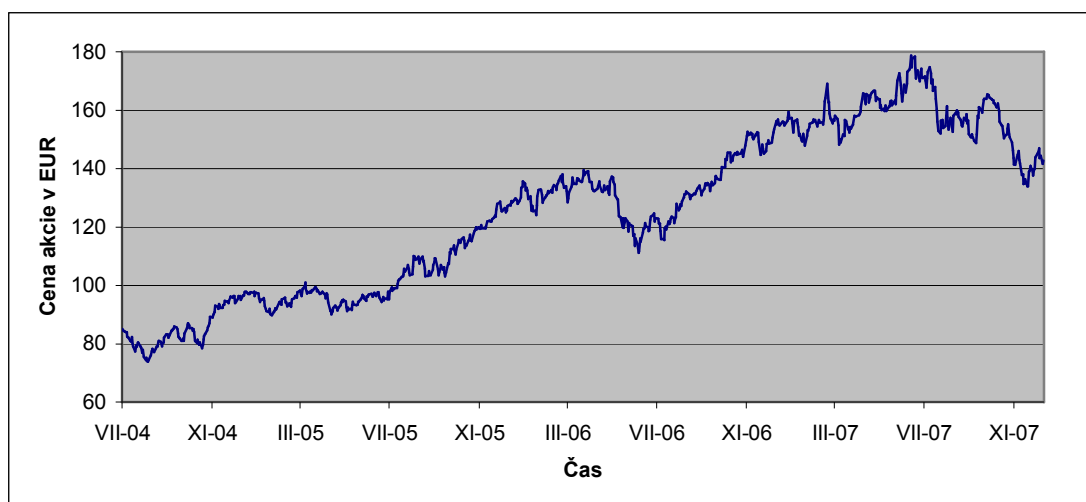
*Obr. IV: Vývoj cen akcií Unipetrol*



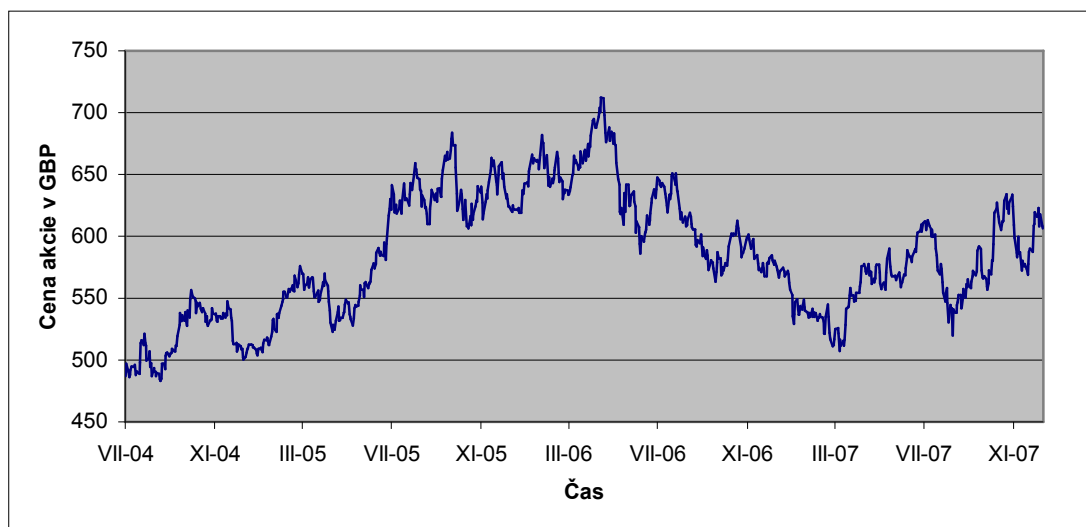
*Obr. V: Vývoj cen akcií Zentiva*



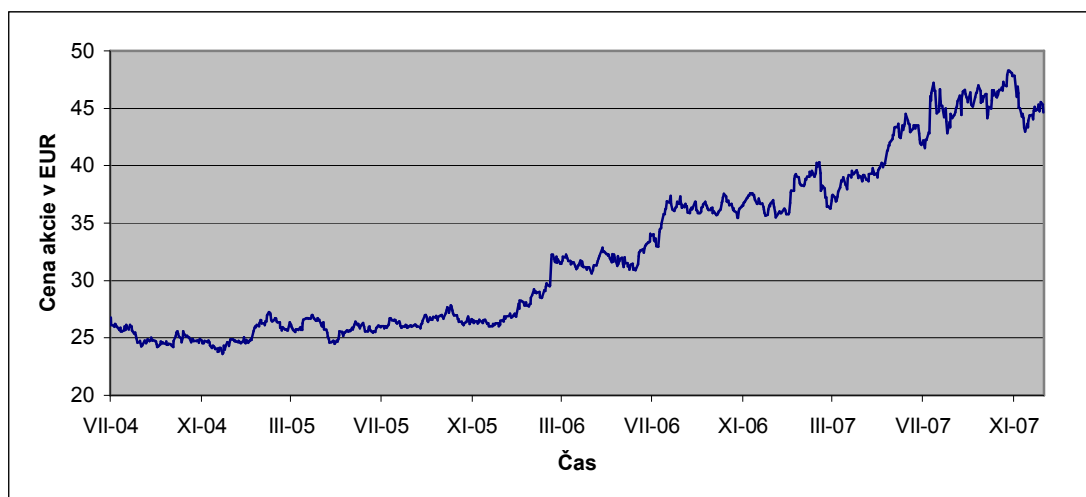
*Obr. VI: Vývoj cen akcií Allianz*



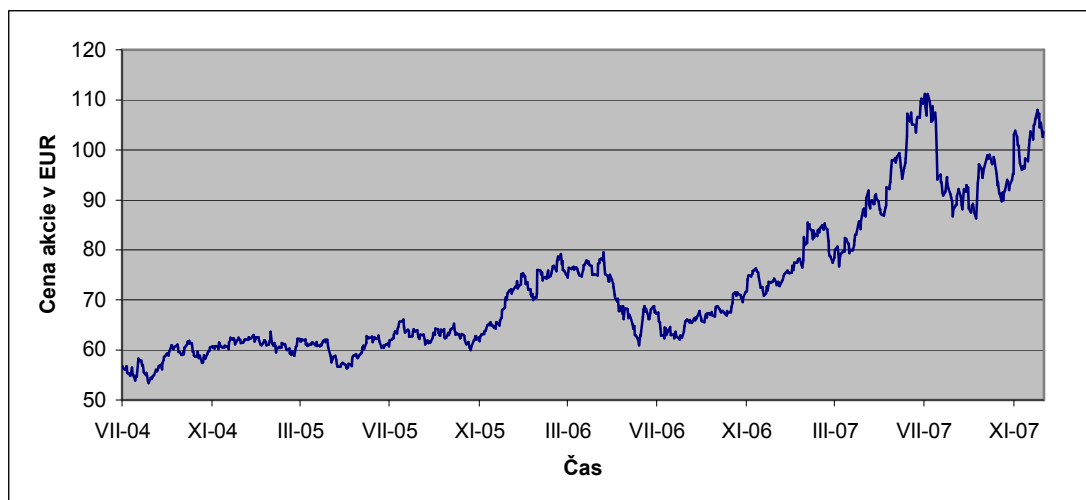
*Obr. VII: Vývoj cen akcií BP*



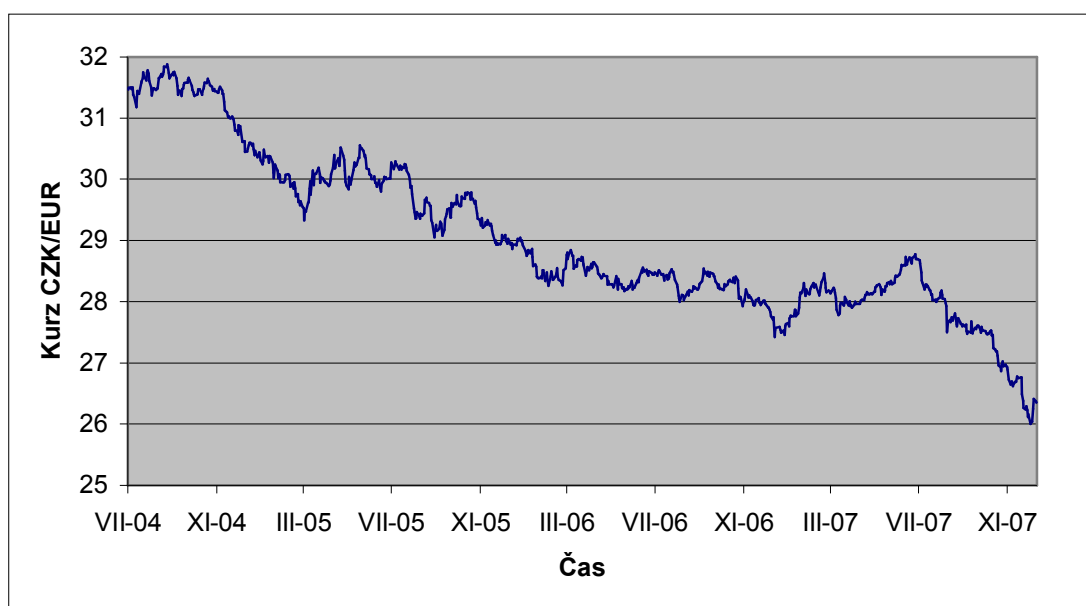
*Obr. VIII: Vývoj cen akcií Heineken*



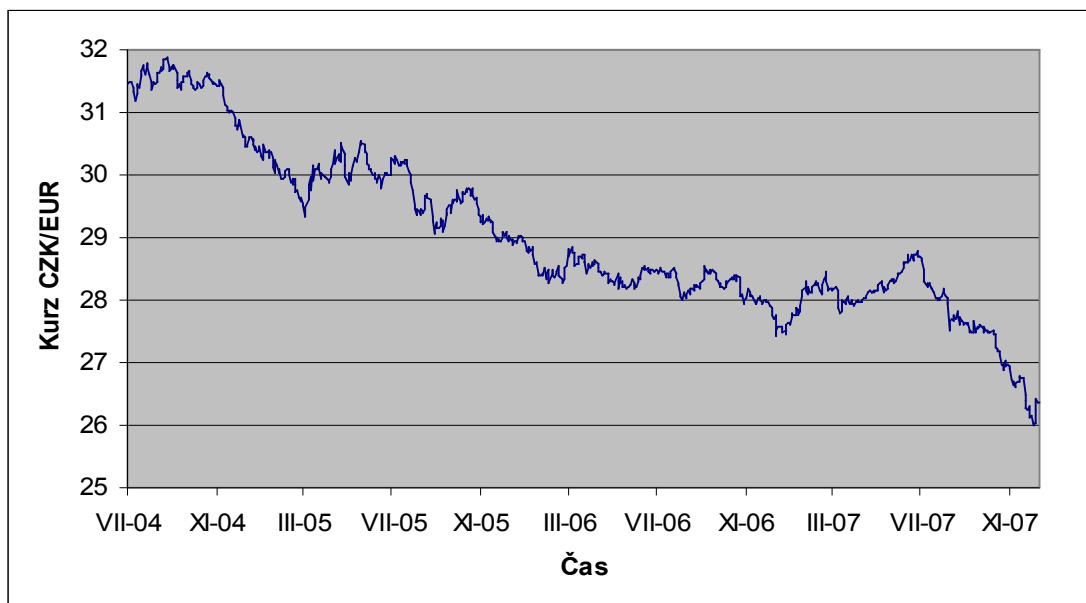
*Obr. IX: Vývoj cen akcií Siemens*



*Obr. X: Vývoj měnového kurzu CZK/GBP*



*Obr. XI: Vývoj měnového kurzu CZK/EUR*





## Příloha č. 2: Stanovení parametrů teorie extrémních hodnot

Denní výnosy	Opačné denní výnosy	$\ln \left[ \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta} \right)^{-1/\xi - 1} \right]$
-0,05285	0,05285	0,66069
-0,05000	0,05000	0,94646
-0,04791	0,04791	1,15793
-0,04084	0,04084	1,88498
-0,03925	0,03925	2,05075
-0,03789	0,03789	2,19357
-0,03695	0,03695	2,29261
-0,03496	0,03496	2,50350
-0,03439	0,03439	2,56439
-0,03039	0,03039	2,99334
-0,02729	0,02729	3,33008
-0,02711	0,02711	3,35018
-0,02598	0,02598	3,47472
-0,02387	0,02387	3,70693
-0,02386	0,02386	3,70822
-0,02381	0,02381	3,71442
-0,02306	0,02306	3,79702
-0,02268	0,02268	3,83968
-0,02263	0,02263	3,84543
-0,02197	0,02197	3,91893
-0,02161	0,02161	3,95932
-0,02055	0,02055	4,07765
-0,02052	0,02052	4,08076
-0,02034	0,02034	4,10143
-0,02028	0,02028	4,10802
-0,02022	0,02022	4,11469
-0,02007	0,02007	4,13120
-0,01956	0,01956	4,18869
-0,01917	0,01917	4,23317
-0,01847	0,01847	4,31257
-0,01839	0,01839	4,32137
-0,01828	0,01828	4,33396
-0,01821	0,01821	4,34153
-0,01812	0,01812	4,35199
-0,01768	0,01768	4,40211
-0,01766	0,01766	4,40356
-0,01759	0,01759	4,41219
-0,01736	0,01736	4,43798
-0,01716	0,01716	4,46077
-0,01709	0,01709	4,46932
-0,01623	0,01623	4,56685
-0,01605	0,01605	4,58745
-0,01569	0,01569	4,62874
-0,01559	0,01559	4,64015
-0,01550	0,01550	4,65089
-0,01541	0,01541	4,66060

**Hodnota účelové funkce**

**168,91079**